Вопросы к экзаменам по теоретической механике отделение механики

Лектор: Олег Зубелевич

3 семестр

1. Кинематика

(1) Закон движения точки, траектория точки относительно системы отсчета (СО). Определения скорости и ускорения точки.
(2) Скорость и ускорение точки в полярной системе координат. Скорость и ускорение точки при движении по окружности.
(3) Кинематическое определение твердого тела (твердым телом называется множество точек, не лежащих на одной прямой, и расстояние между которыми не меняется со временем). Формулировка теоремы Эйлера ($\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{BA}]$). Определение угловой скорости. Доказательство теоремы Эйлера. Пример: Вычисление угловой скорости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
(4) Мгновенная ось вращения твердого тела с неподвижной точкой. Подвижный и неподвижный аксоиды. Поступательное движение твердого тела (... $\iff \boldsymbol{\omega} = 0$).
(5) Определение углового ускорения. Формула Ривальса ($\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_B + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{BA}]] + [\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{BA}]$).
(6) Подвижные системы координат, угловая скорость подвижной системы координат. Определение относительной производной. Формула относительной производной вектора ($\frac{d}{dt}\boldsymbol{u} = \frac{\delta}{\delta t}\boldsymbol{u} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}]$).
(7) Определение относительных и переносных скоростей и ускорений, кориолисово ускорение. Теорема о сложении скоростей и теорема о сложении ускорений. Теорема о сложении угловых скоростей.
(8) Плоскопараллельное движение твердо тела: выражение угловой скорости через угол поворота. Мгновенный центр скоростей.
(9) Углы Эйлера, кинематические формулы Эйлера.

2. Элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений

Теоремы этого раздела не доказываются.

(1) Скалярные ОДУ $n-$порядка разрешенные относительно старшей производной. Система ОДУ первого порядка в нормальной форме. Сведение скалярного ОДУ к нормальной системе.
(2) Задача Коши, теорема существования и единственности.
(3) Расширенное фазовое пространство, фазовое пространство.
(4) Автономные ОДУ, векторные поля. Фазовый поток и его групповое свойство.

(5) Первые интегралы. Группы симметрий. Коммутатор векторных полей.

3. Постулаты классической механики

(1) Инерциальные системы отсчета, первый закон Ньютона.
(2) Принцип детерминированности.
(3) Масса материальной точки, аддитивность массы.
(4) Второй закон Ньютона.
(5) Принцип суперпозиции сил.
(6) Преобразования Галилея, принцип относительности Галилея.
(7) Третий закон Ньютона.

4. Динамика материальной точки

(1) Кинетический момент, момент силы, теорема об изменении кинетического момента.
(2) Кинетическая энергия точки. Теорема об изменении энергии. Потенциальные силы. Закон сохранения энергии.
(3) Примеры: Математический маятник (фазовый портрет). Общие принципы построения фазового портрета.
(4) Движение в центральном поле для случая силы зависящей лишь от расстояния до центра: уравнения движения, интеграл кинетического момента, потенциальность силового поля, интеграл энергии.
(5) Задача о движении точки по плоскости в поле центра, притягивающего по закону всемирного тяготения (задача Кеплера). Движение по эллипсу, гиперболе, параболе. Вывод трех законов Кеплера. Фазовый портрет приведенной системы. Интеграл Лапласа.
(6) Движение материальной точки относительно неинерциальной СО. Переносная сила инерции, кориолисова сила инерции.

5. Элементы теории устойчивости

(1) Общее определение устойчивости решения по Ляпунову.
(2) Теорема об устойчивости положения равновесия в терминах функций Ляпунова (автономный случай). Пример: Гироскопическая стабилизация в задаче о движении точки по сфере в поле силы Лоренца и силы тяжести.
(3) $\omega-$предельное множество решения системы $\dot{x} = v(x)$. Свойства $\omega-$предельного множества.
(4) Теорема о неустойчивости Красовского
(5) Теорема Барбашина-Красовского (без док-ва)
(6) Устойчивость/неустойчивость положений равновесия по линейному приближению. (Без доказательства)

6. Общие теоремы динамики

6.1. Общие теоремы динамики системы материальных точек.

(1) Система материальных точек, внешние и внутренние силы. Центр масс. Теорема о движении центра масс.
(2) Кинетический момент системы относительно неподвижной точки. Момент сил. Теорема об изменении кинетического момента.

(3) Пример: задача двух тел.
(4) Кинетическая энергия системы. Теорема об изменении энергии, дифференциальная форма работы. Потенциальные силы. Закон сохранения энергии.
(5) Оси Кенига. Выражение кинетического момента и кинетической энергии в осях Кенига. Теоремы об изменении кинетической энергии и кинетического момента в осях Кенига.
(6) Задача многих тел. Планетарные движения. Теорема Якоби.

6.2. Общие теоремы динамики твердого тела.

(1) Динамическое определение твердого тела (Твердым телом называется система материальных точек, не лежащих на одной прямой, расстояние между которыми не меняется во времени. Силы, удерживающие постоянное расстояние между точками, являются внутренними.)
(2) Оператор инерции и его свойства. Главные оси инерции и главные центральные оси инерции. Эллипсоид инерции. Момент инерции относительно оси. Теорема Гюйгенса-Штейнера.
(3) Выражение для кинетического момента и кинетической энергии твердого тела в терминах оператора инерции.
(4) Теоремы об изменении кинетического момента твердого тела относительно неподвижной точки и в осях Кенига. Система уравнений движения твердого тела.
(5) Теоремы об изменении кинетической энергии твердого тела относительно инерциальной системы и в осях Кенига. (Теоремы выводятся из уравнений движения.)
(6) Теоремы об изменении кинетической энергии и кинетического момента для твердого тела с неподвижной точкой.
(7) Уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в поле силы тяжести в системе координат связанной с твердым телом. Первые интегралы. Случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской.
(8) Теорема Рауса.
(9) Волчок Эйлера, представление Пуансо .

4 семестр

7. Гладкие многообразия

(1) Определение гладкого многообразия. Многообразие, заданное в $\mathbb{R}^m$ системой уравнений.
(2) Векторные и ковекторные поля на многообразиях. Коммутатор векторных полей – векторное поле. Динамические системы на многообразиях.
(3) Метрический тензор, римановы многообразия.
(4) Касательное и кокасательное расслоение

8. Идеальные связи. Принцип Даламбера-Лагранжа

(1) Система материальных точек со связями. Виртуальные и действительные перемещения. Реакции связей и активные силы; идеальные связи.
(2) Принцип Даламбера-Лагранжа.

9. Лагранжев формализм

9.1. Системы с идеальными связями в обобщенных координатах.

(1) Обобщенные координаты. Уравнения связей, виртуальные и действительные перемещения в обобщенных координатах. Обобщенные силы.
(2) Обобщенно потенциальные силы, структура обобщенного потенциала. Силы с полной диссипацией и гироскопические силы. Структура кинетической энергии.
(3) Принцип Даламбера-Лагранжа в обобщенных координатах ($\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q_k\right)\delta q^k = 0$)
(4) Лагранжиан, структура лагранжиана, натуральные лагранжианы; ($\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k}\right)\delta q^k = 0$). Преобразования лагранжиана, не меняющие принцип Даламбера-Лагранжа: $L \mapsto const \cdot L, \quad L \mapsto L + \dot f(t,x)$.
(5) Обобщенная теорема об изменении энергии : $H = \frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\dot q^k - L$, форма работы $Q_i dq^i$, закон сохранения энергии.
(6) Первые интегралы механической системы в обобщенных координатах, обобщенный интеграл энергии, сохранение обобщенного импульса, теорема Нетер.
(7) Пример: Сани Чаплыгина на наклонной плоскости.
(8) Голономные и неголономные связи. Теорема Фробениуса (без доказательства).

9.2. Голономные системы, уравнения Лагранжа.

(1) Теорема Лагранжа-Дирихле и ее обобщения
(2) Обобщенный импульс, циклические интегралы, понижение порядка по Раусу, приведенный потенциал.
(3) Теорема Рауса-Сальватори;
(4) Волчок Лагранжа в углах Эйлера.
(5) Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость положения равновесия
(6) Малые колебания лагранжевых систем в окрестности положения равновесия.
(7) Устойчивость точек либрации в плоской круговой ограниченной задаче трех тел.
(8) Дискретные лагранжевы системы, антиинтегрируемый предел.
(9) Задача о перевернутом маятнике на тележке.
(10) Обобщенные решения уравнений динамики: лагранжева теория удара.

9.3. Вариационные принципы.

(1) Вариационный принцип Гамильтона ($\delta \int L dt = 0$).
(2) Геодезические на римановом многообразии.
(3) Вариационный принцип Мопертюи-Лагранжа-Якоби ($\delta \int \sqrt{T(h-V)}dt = 0$). Метрика Якоби, геодезические.

5 семестр

10. Интегральные инварианты

(1) Производная Ли, формула $L_v\omega = di_v\omega + i_v d\omega$.
(2) Интегральные инварианты абсолютные и относительные, формула $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int_{g^t(S)}\omega = \int_S L_v\omega$.
(3) Интегральные инварианты в неавтономных системах.
(4) Теорема Лиувилля ($\rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0$).
(5) Сужение системы с инвариантной мерой с гладкой плотностью на уровень первого интеграла.

(6) Интегрирование в квадратурах системы с инвариантной мерой с гладкой плотностью и $m-2$ первыми интегралами. Пример: система уравнений твердого тела с неподвижной точкой.

11. Гамильтонова механика

(1) Преобразование Лежандра, инволютивность преобразования Лежандра. Вывод уравнений Гамильтона из уравнений Лагранжа. Расширенное фазовое пространство и фазовое пространство гамильтоновой системы.
(2) Симплектические многообразия, тензорная форма уравнений Гамильтона, теорема Дарбу (без док-ва).
(3) Первые интегралы уравнений Гамильтона, скобка Пуассона и ее свойства. Отделение переменных в гамильтониане. Сохранение фазового объема потоком уравнений Гамильтона.
(4) Пример: Движение частицы в поле диполя.
(5) Теорема об относительном интегральном инварианте Пуанкаре-Картана $\omega = p_i dq^i - H dt$; абсолютный интегральный инвариант $d\omega$.
(6) Интегральные кривые уравнений Гамильтона как линии ротора формы ω.
(7) Понижение порядка гамильтоновой системы с помощью интеграла энергии.
(8) Канонические преобразования в расширенном фазовом пространстве и в фазовом пространстве, фазовый поток уравнений Гамильтона. Пример: канонические перестановки: $p_i = Q^i, \quad q^i = -P_i; \quad p_i = P_j, \quad q^i = Q^j, \quad p_j = P_i, \quad q^j = Q^i$.
(9) Производящие функции канонических преобразований, уравнение Гамильтона-Якоби.
(10) Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, Разделение переменных.
(11) Теорема Лиувилля об интегрируемости в квадратурах системы с инволютивным набором интегралов.
(12) Теорема Лиувилля-Арнольда (без док-ва). Переменные "Действие-Угол"; условно периодические движения, резонансные торы.
(13) Гамильтонова версия теоремы о выпрямлении векторного поля. Отображение Пуанкаре на уровне интеграла энергии.
(14) Дискретные динамические системы с инвариантной мерой. Теорема Пуанкаре о возвращении.
(15) Эргодичность. Теорема Биркгофа-Хинчина (без док-ва). Всюду плотные траектории в эргодической системе.
(16) Классическая схема теории возмущений, теорема об усреднении по времени в системе $\dot{x} = \epsilon v(t, x, \epsilon), \quad t \pmod{2\pi}$. Усреднение в гамильтоновых системах.
(17) Теорема Колмогорова о сохранении условно-периодических движений.