

Вопросы к экзамену по аналитической механике

Лектор: Олег Зубелевич

Аналитическая механика

1. Идеальные связи. Принцип Даламбера-Лагранжа

- (1) Система материальных точек со связями. Виртуальные и действительные перемещения. Реакции связей и активные силы; идеальные связи. Голономные и неголономные связи.
- (2) Принцип Даламбера-Лагранжа.

2. Лагранжев формализм

2.1. Системы с идеальными связями в обобщенных координатах.

- (1) Обобщенные координаты. Уравнения связей, виртуальные и действительные перемещения в обобщенных координатах. Обобщенные силы.
- (2) Обобщенно потенциальные силы, структура обобщенного потенциала. Структура кинетической энергии.
- (3) Принцип Даламбера-Лагранжа в обобщенных координатах ($(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q_k) \delta q^k = 0$)
- (4) Лагранжиан, структура лагранжиана, натуральные лагранжианы; ($(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k}) \delta q^k = 0$). Преобразования лагранжиана, не меняющие принцип Даламбера-Лагранжа: $L \mapsto const \cdot L$, $L \mapsto L + \dot{f}(t, x)$.
- (5) Обобщенная теорема об изменении энергии: $H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - L$, форма работы $Q_i dq^i$, закон сохранения энергии.
- (6) Первые интегралы механической системы в обобщенных координатах, обобщенный интеграл энергии, сохранение обобщенного импульса, теорема Нетер.
- (7) Пример: Сани Чаплыгина на наклонной плоскости.
- (8) Голономные и неголономные связи. Теорема Фробениуса (без доказательства).

2.2. Голономные системы, уравнения Лагранжа.

- (1) Теорема Лагранжа-Дирихле и ее обобщения
- (2) Обобщенный импульс, циклические интегралы, понижение порядка по Раусу, приведенный потенциал.
- (3) Теорема Рауса-Сальватори ;
- (4) Волчок Лагранжа в углах Эйлера .
- (5) Малые колебания лагранжевых систем в окрестности положения равновесия.

2.3. Вариационные принципы.

- (1) Вариационный принцип Гамильтона ($\delta \int L dt = 0$).
- (2) Вариационный принцип Мопертюи-Лагранжа-Якоби ($\delta \int \sqrt{T(h-V)} dt = 0$). Метрика Якоби, геодезические.
- (3) Понятие о вакономной механике.

3. Интегральные инварианты

- (1) Фазовый поток системы $\dot{x} = v(x)$. Производная Ли, формула $L_v \omega = di_v \omega + i_v d\omega$.
- (2) Интегральные инварианты абсолютные и относительные, формула $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{g^t(S)} \omega = \int_S L_v \omega$.
- (3) Интегральные инварианты в неавтономных системах.
- (4) Теорема Лиувилля ($\rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0$).
- (5) Сужение системы с инвариантной мерой с гладкой плотностью на уровень первого интеграла.
- (6) Интегрирование в квадратурах системы с инвариантной мерой с гладкой плотностью и $m-2$ первыми интегралами. Пример: система уравнений твердого тела с неподвижной точкой.

4. Гамильтонова механика

- (1) Преобразование Лежандра. Вывод уравнений Гамильтона из уравнений Лагранжа. Расширенное фазовое пространство и фазовое пространство гамильтоновой системы.
- (2) Симплектические многообразия, тензорная форма уравнений Гамильтона, теорема Дарбу (без док-ва).
- (3) Первые интегралы уравнений Гамильтона, скобка Пуассона и ее свойства. Отделение переменных в гамильтониане. Сохранение фазового объема потоком уравнений Гамильтона.
- (4) Пример: Движение частицы в поле диполя.
- (5) Пуассоновы многообразия, определение, функции Казимира. Лемма о носителе скобки Пуассона, скобка Пуассона в локальных координатах. невырожденная скобка Пуассона и симплектическая структура.
- (6) Теорема об относительном интегральном инварианте Пуанкаре-Картана $\omega = p_i dq^i - H dt$; абсолютный интегральный инвариант $d\omega$.
- (7) Интегральные кривые уравнений Гамильтона как линии ротора формы ω .
- (8) Понижение порядка гамильтоновой системы с помощью интеграла энергии.
- (9) Канонические преобразования в расширенном фазовом пространстве и в фазовом пространстве, фазовый поток уравнений Гамильтона. Пример: канонические перестановки: $p_i = Q^i, q^i = -P_i; p_i = P_j, q^i = Q^j, p_j = P_i, q^j = Q^i$.
- (10) Производящие функции канонических преобразований, уравнение Гамильтона-Якоби.
- (11) Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, Разделение переменных.
- (12) Теорема Лиувилля об интегрируемости в квадратурах системы с инволютивным набором интегралов.
- (13) Теорема Лиувилля-Арнольда (без док-ва). Переменные "Действие-Угол"; условно периодические движения, резонансные торы.
- (14) Гамильтонова версия теоремы о выпрямлении векторного поля. Отображение Пуанкаре на уровне интеграла энергии.

- (15) Дискретные динамические системы с инвариантной мерой. Теорема Пуанкаре о возвращении.
- (16) Классическая схема теории возмущений, теорема об усреднении по времени в системе $\dot{x} = \epsilon v(t, x, \epsilon), \quad t \pmod{2\pi}$.
- (17) Устойчивость верхнего положения маятника с вибрирующей точкой подвеса.
- (18) Теорема Колмогорова о сохранении условно-периодических движений.
- (19) Эргодичность. Теорема Биркгофа-Хинчина (без док-ва). Всюду плотные траектории в эргодической системе.