

Программа экзамена по аналитической  
механике  
Лектор С.В.Болотин

**Уравнения Лагранжа**

- Голономные связи, конфигурационное пространство, обобщенные координаты. Возможные и действительные перемещения. Реакции связей. Идеальные связи. Принцип Даламбера-Лагранжа.
- Обобщенные силы. Вывод уравнений Лагранжа из принципа Даламбера-Лагранжа.
- Вид кинетической энергии в обобщенных координатах. Разрешимость уравнений Лагранжа относительно вторых производных. Явный вид уравнений Лагранжа для натуральных систем.
- Случай потенциальных сил, лагранжиан. Первые интегралы уравнений Лагранжа: обобщенный интеграл энергии (интеграл Якоби), циклические координаты и циклические интегралы.
- Понижение порядка по Раусу. Пример: задача Кеплера.
- Поля симметрий. Теорема Нетер.

**Вариационные принципы**

- Функционал действия Гамильтона. Принцип Гамильтона. Применение: сохранение уравнений Лагранжа при калибровочном преобразовании  $L \rightarrow L + \frac{df}{dt}$ .
- Формула для вариации функционала действия Гамильтона с подвижными концами. Применение – теорема Нетер.

- Принцип Мопертюи–Якоби для натуральных систем. Метрика Якоби в области возможности движения. Применение: доказательство существования периодических траекторий с заданной энергией на неодносвязном многообразии.

### **Теория устойчивости**

- Положения равновесия натуральных лагранжевых систем. Теорема Лагранжа–Дирихле.
- Диссипативные и гироскопические силы. Их влияние на устойчивость положений равновесия. Примеры гироскопических сил.
- Линеаризация уравнений Лагранжа около положения равновесия. Уравнения малых колебаний. Нормальные координаты для натуральных систем.
- Степень неустойчивости. Теорема Кельвина–Четаева о возможности стабилизации гироскопическими силами. Пример: неустойчивость коллинеарных точек либрации в ограниченной задаче 3 тел.

### **Системы с инвариантной мерой**

- Теорема Лиувилля об инвариантной мере с гладкой плотностью.
- Задание меры дифференциальной формой. Ограничение инвариантной меры на многообразии уровня первого интеграла.
- Понятие интегрируемости в квадратурах. Теорема Якоби об интегрируемости системы с инвариантной мерой. Пример: уравнения Эйлера–Пуассона в динамике твердого тела.
- Дискретные динамические системы. Теорема Пуанкаре о возвращении.

### **Динамика твердого тела с неподвижной точкой**

- Уравнения Эйлера–Пуассона для тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Первые интегралы уравнений Эйлера–Пуассона.
- Инвариантная мера уравнений Эйлера–Пуассона и интегрируемость в квадратурах. Три классических случая интегрируемости: Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

- Волчок Эйлера. Уравнения движения, первые интегралы, стационарные вращения. Фазовый поток на поверхности уровня интеграла энергии. Устойчивость стационарных вращений.
- Геометрическая интерпретация Пуансо движения волчка Эйлера.
- Волчок Лагранжа. Циклические координаты и интегралы. Понижение порядка по Раусу. Фазовый портрет приведенной системы. След оси волчка на сфере (без доказательства). Регулярная прецессия.

### **Классическая гамильтонова механика**

- Преобразование Лежандра и его свойства. Функция Гамильтона, вывод уравнений Гамильтона. Гамильтониан натуральной системы.
- Свойства уравнений Гамильтона: интеграл энергии; циклические интегралы и понижение порядка, инвариантная мера.
- Принцип Гамильтона в фазовом пространстве (в форме Пуанкаре). Вариация с подвижными концами. Относительные интегральные инварианты Пуанкаре–Картана и Пуанкаре.
- Абсолютные интегральные инварианты Пуанкаре и Пуанкаре–Картана. Инвариантность фориы  $dp \wedge dq$  относительно фазового потока. Следствие: теорема Лиувилля о сохранении фазового объема.
- Канонические преобразования. Производящая функция. Свободные канонические преобразования. Производящая функция тождественного преобразования и преобразования, близкого к тождественному.
- Уравнение Гамильтона-Якоби. Его полный интеграл. Теорема Якоби об интегрируемости в квадратурах. Примеры: задача Кеплера и движение в поле диполя.
- Принцип Мопертюи в гамильтоновой механике. Понижение порядка по Уиттекеру.

## Гамильтонова механика на многообразиях

- Симплектическое многообразие. Формулировка теоремы Дарбу. Гамильтоново векторное поле.
- Скобка Пуассона и ее свойства. Тождество Якоби. Алгебра Ли функций на симплектическом многообразии. Коммутатор гамильтоновых векторных полей. Теорема Пуассона о первых интегралах.
- Первые интегралы в инволюции. Теорема Лиувилля–Арнольда. Идея доказательства топологической части (теорема Арнольда).
- Теорема Лиувилля об интегрируемости в квадратурах.
- Переменные действие-угол для систем с одной степенью свободы. Пример: гармонический осциллятор.

## Учебники

- Основной учебник, наиболее близкий к курсу лекций:  
[1] Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В. Теоретическая механика.
- Учебник по математическим аспектам классической механики:  
[2] Арнольд В.И. Математические методы классической механики.
- Есть много других хороших учебников:  
[3] Вильке В.Г. Теоретическая механика.  
[4] Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики.  
[5] Маркеев А.П. Теоретическая механика.  
[6] Суслов Г.К. Теоретическая механика.  
[7] Татаринов Я.В. Лекции по классической динамике.