Введение в специальность: задачи. Кафедра теоретической механики и мехатроники

1. Человек в метро. Поезд метро движется с постоянным ускорением. Человек идет по вагону вперед с постоянной (относительно вагона) скоростью. Человеку приходится совершать механическую работу, поскольку назад его тянет сила инерции. Куда девается потраченная человеком энергия? Ведь если бы он стоял на месте, то воздействовал бы на вагон ровно такой же силой, хотя никакой энергии не тратил.

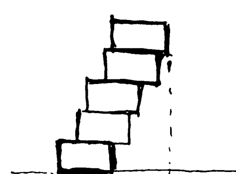
2. Циклоида. Написать уравнение кривой, описываемой точкой, расположенной на ободе колеса при плоском качении колеса по прямой без проскальзывания. Нарисовать эту кривую. Показать, что в точках потери гладкости кривая имеет особенности типа $y^3 = x^2(a + f(x))$, где $a \neq 0$ и $f(x)$ стремится к нулю при $x \to 0$.

3. От Земли до Луны. (а) Зная, что период малых колебаний математического маятника длины l равен $2\pi\sqrt{l/g}$, проверьте экспериментально, что числовое значение g, известное вам из школьного учебника, соответствует действительности.

(б) Используя числовые значения g и радиуса Земли, вычислите, чему равна величина γM, где γ – гравитационная постоянная, а M – масса Земли.

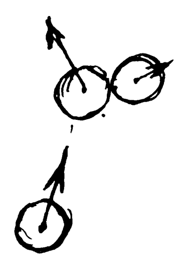
(в) Используйте предыдущее вычисление для того, чтобы найти расстояние о Луны.

4. Кирпичи. Имеется N одинаковых кирпичей. Доказать, что в присутствии сил тяжести можно положить на первый кирпич второй, на него третий и т.д., так что полученная конструкция не упадет, но ее ширина с ростом N оказывается неограниченной.

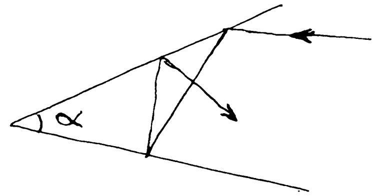


5. Шары: одномерное движение. Сталкиваются два шара с массами m_1 и m_2, центры которых движутся по одной и той же прямой. Пусть скорости центров до столкновения равны v_1 и v_2. Найти скорости после столкновения в случае (а) абсолютно упругого, (б) абсолютно неупругого удара.

6. Шары в пространстве. На неподвижный биллиардный шар, неподвижно висящий в пространстве (никаких сил нет), налетает движущийся поступательно точно такой же шар. Удар абсолютно упругий. Доказать, что после удара шары разлетятся под прямым углом.



7. Точка внутри угла. Точка движется внутри угла величины α, упруго отражаясь от его стенок. Сколько ударов произойдет в процессе движения? (Имеется в виду все движение, при изменении времени от $-\infty$ до $+\infty$.)



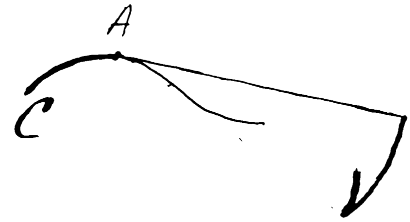
8. На горке. Имеется наклонная прямая в поле сил тяжести (горка). Горку можно залить льдом и по ней может съехать без трения ящик. А можно ее сделать шероховатой и скатить по ней без проскальзывания обруч или однородный цилиндр. Считаем, чо ве указанные движения начинаются из состояния покоя. Центр какого из предметов пройдет единичное расстояние быстрее? У какого медленнее? Как относятся эти времена?

9. Поворот окружности. Пусть φ – угловая координата на окружности, а ω – вещественное число. Рассмотрим последовательность точек на окружности:

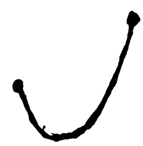
$$\varphi = 0, \quad \varphi = \omega, \quad \varphi = 2\omega, \quad \ldots$$

Доказать, что либо эта последовательность содержит лишь конечное число различных точек (периодическая траектория), либо заполняет окружность всюду плотно (квазипериодическая траектория).

10. Эвольвента. Нить конечной длины сматывается с гладкой плоской кривой C. При этом конец нити описывает кривую, называемую эвольвентой. Когда точка A схода нити с кривой проходит через точку перегиба кривой C, у эвольвенты появляется особенность. Показать, что эта особенность того же типа, что и у циклоиды из задачи 2.



11. Цепная линия. Веревку подвесили за два конца в поле сил тяжести. График какой функции получился?



12. Относительные равновесия в плоской круговой ограниченной зааче трех тел. Солнце S массы m_S и Юпитер J массы m_J притягиваются друг к другу согласно гравитационному закону. Предположим, что они равномерно вращаются вокруг общего центра масс по окружностям.

(а) Найти отношение радиусов этих окружностей.

(б) Рассмотрим равномерно вращающуюся систему координат, в которой S и J остаются неподвижными. В какую точку этой системы координат можно поместить астероид A (влиянием которого на S и J можно пренебречь) так, чтобы он в ней остался навсегда, иначе говоря, чтобы гравитационные и центробежные силы, действующие на A, уравновесились. Этих точек всегда 5.

13. Изохронный маятник. Циклоида из задачи 2 перевернута вверх ногами. По ней в поле сил тяжести без трения движется материальная точка. Проверить, что период колебаний точки не зависит от амплитуды.

14. Линейная одномерная цепочка. Простейшая модель из физики твердого тела выглядит следующим образом. Рассмотрим бесконечную последовательность

одинаковых частиц массы m на прямой. Каждая частица соединена с двумя соседними одинаковыми пружинами жесткости k. Ясно, что положение, при котором все расстояния между соседними частицами равны друг другу, является положением равновесия. Пусть координата x_n – отклонение n-той частицы от положения равновесия.

Проверьте, что движение системы характеризуется бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Точка – производная по времени t.

Рассмотрим для простоты движение со следующими начальными условиями. При $t = 0$ все скорости $\dot{x}_n$ равны нулю и все положения x_n равны нулю кроме одного: $x_0(0) = 1$. Компьютерный эксперимент показывает, что при достаточно больших значениях t движение цепочки имеет следующий вид. Пусть ε – произвольная положительная постоянная. Существует постоянная $c > 0$ такая, что при $n < (c - \varepsilon)t$ частицы колеблются с амплитудой порядка $1/\sqrt{t}$, при $n \approx ct$ амплитуда заметно возрастает, а при $n > (c + \varepsilon)t$ частицы практически неподвижны. Попробуйте объяснить теоретически, почему динамика линейной цепочки именно такова. В частности, вычислите "скорость звука" c.