МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра теоретической механики и мехатроники

К.Е. Якимова, Т.В. Попова

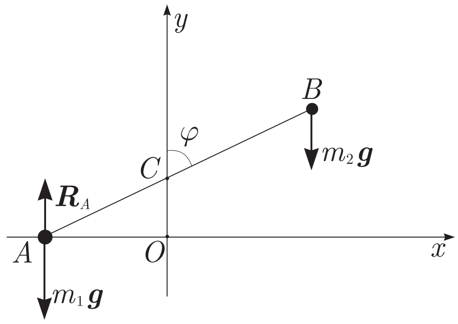
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к сборнику "Задачи по теоретической механике"

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Москва 2009

Пример 1. *Две материальные точки A массы m_1 и B массы m_2, связанные невесомым стержнем длины l, движутся так, что точка A скользит по гладкой горизонтальной прямой, а B остается в вертикальной плоскости, содержащей траекторию точки A. Найти абсолютную траекторию точки B, если в начальный момент система покоилась.*



К примеру 1.

Решение. Введем неподвижную систему координат $Oxyz$ с началом в некоторой точке O так, что ось Ox направлена вдоль горизонтальной прямой, по которой движется точка A, ось Oy — вертикаль, лежащая в плоскости движения точки B, ось Oz перпендикулярна плоскости движения системы.

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении количества движения

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{F}^{(e)} + \boldsymbol{R}^{(e)},$$

где $\boldsymbol{Q}$ — количество движения системы (импульс системы), $\boldsymbol{F}^{(e)}$ — главный вектор заданных внешних сил, $\boldsymbol{R}^{(e)}$ — главный вектор реакций внешних связей. На точки системы действуют заданные внешние силы (силы тяжести), параллельные оси Oy. В силу гладкости внешних связей

$$y_A = 0, \quad z_A = 0, \quad z_B = 0,$$

наложенных на систему, реакции внешних связей не имеют составляющей, направленной по оси Ox. В результате теорема об изменении количества движения в проекции на ось Ox принимает вид

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{x}_A + m_2\dot{x}_B) = 0.$$

Отсюда получаем первый интеграл (закон сохранения количества движения в проекции на ось Ox)

$$m_1\dot{x}_A + m_2\dot{x}_B = C_1$$

или

$$(m_1 + m_2)\dot{x}_C = C_1,$$

где точка C — центр масс системы, C_1 — константа интеграла. Так как в начальный момент времени система покоилась, то константа C_1 интеграла равна нулю, значит,

$$(m_1 + m_2)\dot{x}_C = 0.$$

Отсюда, $x_C = C_2$, C_2 — константа. Если положение начала координат выбрать так, чтобы ось Oy проходила через начальное положение центра масс системы, то константа C_2 обратится в нуль, и значит, во все время движения будет выполняться равенство $x_C = 0$. То есть система движется так, что ее центр масс C перемещается только по вертикали.

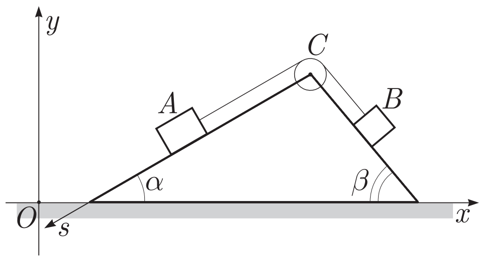
Определяя положение отрезка AB в плоскости Oxy углом φ между AB и вертикалью, получаем

$$x_B = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \sin\varphi, \quad y_B = l\cos\varphi.$$

Таким образом, траектория точки B — эллипс с полуосями $\dfrac{m_1 l}{m_1 + m_2}$ и l:

$$\frac{x_B^2}{\left(\dfrac{m_1 l}{m_1 + m_2}\right)^2} + \frac{y_B^2}{l^2} = 1.$$

Пример 2. *Два груза A и B массы m_1 и массы m_2 соответственно, связанные невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок C, скользят по гладким граням клина массы m, находящегося на гладкой горизонтальной плоскости. Углы при основании клина соответственно равны α и β. Найти перемещение клина, если груз A опустится на высоту h. Массой блока пренебречь. В начальный момент времени система покоилась и грузы были расположены в вертикальной плоскости, ортогональной боковым ребрам клина.*



К примеру 2.

Решение. Введем неподвижную систему координат $Oxyz$ с началом в некоторой точке O так, что ось Oy перпендикулярна горизонтальной плоскости, по которой движется клин, ось Ox лежит в горизонтальной плоскости и плоскости основания клина, ось Oz параллельна боковому ребру клина. Из условия задачи и теорем об изменении количества движения и кинетического момента следует, что клин движется поступательно прямолинейно вдоль оси Ox (почему?).

Связи, наложенные на систему (клин и два груза), идеальны и в каждый момент времени допускают поступательное перемещение системы как твердого тела вдоль оси Ox. Заданные внешние силы на это направление проекций не дают. Следовательно, по теореме об изменении количества движения получаем закон сохранения количества движения в проекции на ось Ox:

$$mv + m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = C_1,$$

здесь v — проекция скорости центра масс клина на ось Ox, v_{1x} и v_{2x} — проекции абсолютных скоростей грузов на ось Ox, C_1 — константа. Поскольку система начинает движение из состояния покоя, константа C_1 обращается в нуль.

Для нахождения проекций абсолютных скоростей грузов на ось Ox введем подвижную систему координат, связанную с клином. Клин движется поступательно вдоль оси Ox, следовательно,

$$\boldsymbol{v}_1 = v\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{v}_{1\text{отн}}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = v\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{v}_{2\text{отн}},$$

где $\boldsymbol{v}_{1\text{отн}}$ и $\boldsymbol{v}_{2\text{отн}}$ — скорости грузов относительно клина, направлены по соответствующим граням клина и равны по величине производным перемещений грузов по этим граням. Пусть x — абсцисса центра масс клина, а s — относительная координата, задающая положение груза A на грани клина. С учетом того, что грузы связаны нерастяжимой нитью, получаем

$$m\dot{x} + m_1(\dot{x} - \dot{s}\cos\alpha) + m_2(\dot{x} - \dot{s}\cos\beta) = 0,$$

откуда, интегрируя, находим

$$(m + m_1 + m_2)x - (m_1\cos\alpha + m_2\cos\beta)s = C_2$$

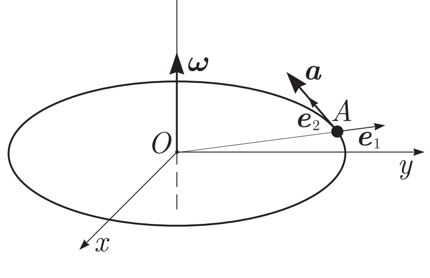
или

$$(m + m_1 + m_2)(x - x(0)) = (m_1\cos\alpha + m_2\cos\beta)(s - s(0)).$$

Если груз A опустился на высоту h, перемещение груза по грани клина равно $s - s(0) = \dfrac{h}{\sin\alpha}$, следовательно, перемещение клина вдоль оси Ox равно

$$x - x(0) = \frac{h}{\sin\alpha}\frac{(m_1\cos\alpha + m_2\cos\beta)}{m + m_1 + m_2}.$$

Пример 3. *Круглая горизонтальная платформа радиуса R и массы M может вращаться без трения вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через ее центр. По краю платформы движется человек (точка) массы m в сторону вращения платформы с постоянным по величине относительным касательным ускорением a. Сколько времени понадобится человеку, чтобы остановить платформу, если при угловой скорости платформы ω_0 относительная скорость человека была равна нулю. Платформу считать однородным диском.*



К примеру 3.

Решение. Введем неподвижную систему координат $Oxyz$ с началом в центре O платформы, оси Ox и Oy которой лежат в плоскости платформы, а ось Oz перпендикулярна этой плоскости и дополняет Ox и Oy до правой тройки.

Связи, наложенные на систему, идеальны и в каждый момент времени допускают поворот всей системы как твердого тела вокруг вертикальной оси Oz, момент заданных сил относительно этой оси равен нулю, следовательно, выполняется закон сохранения кинетического момента системы относительно оси Oz: $\boldsymbol{K}_{Oz} = \text{const}$.

Кинетический момент системы $\boldsymbol{K}_O$ относительно точки O складывается из кинетического момента платформы $\boldsymbol{K}_O^{\text{пл}}$:

$$\boldsymbol{K}_O^{\text{пл}} = I_{Oz}\omega\boldsymbol{e}_z = \frac{MR^2}{2}\omega\boldsymbol{e}_z,$$

где I_{Oz} — момент инерции диска относительно оси Oz, $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_z$ — угловая скорость платформы, и кинетического момента человека $\boldsymbol{K}_O^{\text{чел}}$:

$$\boldsymbol{K}_O^{\text{чел}} = m[\overrightarrow{OA}, \boldsymbol{v}^{\text{чел}}] = m[R\boldsymbol{e}_1, (\omega R + at)\boldsymbol{e}_2] = mR(\omega R + at)\boldsymbol{e}_z,$$

где $\boldsymbol{v}^{\text{чел}}$ — абсолютная скорость человека, $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$, $\boldsymbol{e}_2 \perp \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2 \perp \boldsymbol{e}_z$. В результате кинетический момент системы относительно оси Oz равен

$$\boldsymbol{K}_{Oz} = \big((\boldsymbol{K}_O^{\text{пл}} + \boldsymbol{K}_O^{\text{чел}}), \boldsymbol{e}_z\big) = \left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\omega + mRat.$$

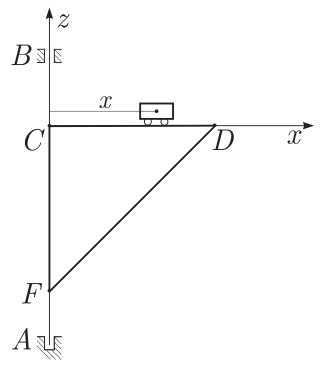
С учетом начальных данных (угловая скорость платформы в начальный момент равна ω_0) получаем

$$\left(\frac{M}{2} + m\right)R\omega + mat = \left(\frac{M}{2} + m\right)R\omega_0.$$

Отсюда находим время τ, необходимое для остановки платформы ($\omega = 0$),

$$\tau = \frac{(M + 2m)R\omega_0}{2ma}.$$

Пример 4. *Тележка поворотного подъемного крана движется с постоянной скоростью v относительно стрелы CDF. Мотор, вращающий кран, создает в период разгона постоянный момент L. Определить угловую скорость ω вращения крана в зависимости от расстояния x от центра масс тележки с грузом до оси вращения AB, если масса тележки с грузом равна m, J_1 — момент инерции тележки с грузом относительно вертикальной оси, проходящей через ее центр масс, J — момент инерции крана (без тележки) относительно оси AB. Вращение начинается в момент, когда центр масс тележки с грузом находился на расстоянии x_0 от оси AB. Ось AB вертикальна.*



К примеру 4.

Решение. Введем неподвижную систему координат $CXYZ$ с началом в точке C стрелы так, что ось CZ направлена вдоль AB, и подвижную систему координат $Cxyz$, связанную со стрелой, ось Cx которой направлена вдоль CD, а оси CZ и Cz совпадают. Координата x задает положение центра масс тележки относительно стрелы.

Связи, наложенные на систему, идеальны и в каждый момент времени допускают поворот всей системы как твердого тела вокруг неподвижной вертикальной оси AB (Cz). По теореме об изменении кинетического момента системы имеем

$$\frac{dK_{Cz}}{dt} = L,$$

где K_{Cz} — проекция кинетического момента системы на ось Cz. Кинетический момент системы складывается из кинетического момента стрелы и кинетического момента тележки, поэтому

$$K_{Cz} = J\omega + (J_1 + mx^2)\omega.$$

Поскольку

$$\frac{dK_{Cz}}{dt} = \frac{dK_{Cz}}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dK_{Cz}}{dx},$$

получаем дифференциальное уравнение, связывающее ω с x,

$$\frac{d}{dx}\left[(J + J_1 + mx^2)\omega\right] = \frac{L}{v}.$$

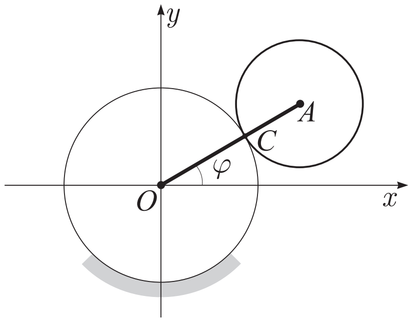
Тогда с учетом начальных данных находим

$$(J + J_1 + mx^2)\omega = \frac{L}{v}(x - x_0).$$

Таким образом, искомое выражение для угловой скорости ω имеет вид

$$\omega = \frac{L(x - x_0)}{v(J + J_1 + mx^2)}.$$

Пример 5. *По внешней стороне горизонтальной неподвижной окружности радиуса r_1 с центром O катится без скольжения, оставаясь в горизонтальной плоскости, однородный диск массы m_1 радиуса r_2. Диск приводится в движение из состояния покоя кривошипом OA (A — центр диска), на который* *действуют пара сил с постоянным моментом L. Найти угловую скорость кривошипа в зависимости от его угла поворота, считая кривошип однородным стержнем массы m_2.*



К примеру 5.

Решение. Введем неподвижную систему координат $Oxyz$ так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости движения диска, а ось Oz перпендикулярна этой плоскости и дополняет Ox и Oy до правой тройки.

Связи, наложенные на систему (неподвижная ось Oz вращения кривошипа; качение без скольжения диска по окружности), идеальны и не зависят от времени (почему?), следовательно, имеем место теорема об изменении кинетической энергии системы

$$dT = \sum_i (\boldsymbol{F}_i, d\boldsymbol{r}_i),$$

где T — кинетическая энергия системы, $\sum\limits_i (\boldsymbol{F}_i, d\boldsymbol{r}_i)$ — элементарная работа всех заданных сил на действительных перемещениях точек, в которых они приложены.

В нашем случае элементарная работа заданных сил (пары сил, создающих момент L, и сил тяжести) равна $Ld\varphi$, где φ — угол поворота кривошипа (доказать). Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии кривошипа и кинетической энергии диска. Поскольку кривошип вращается вокруг оси Oz, его кинетическая энергия равна

$$T_{\text{кр}} = \frac{1}{2} I_{Oz}\omega^2 = \frac{m_2(r_1 + r_2)^2}{6}\dot{\varphi}^2,$$

где I_{Oz} — момент инерции кривошипа относительно оси Oz, $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$ — угловая скорость кривошипа. Кинетическую энергию диска найдем по формуле Кенига

$$T_{\text{д}} = \frac{m_1 v_A^2}{2} + \frac{1}{2} J_{Az}\omega_{\text{д}}^2,$$

где $v_A = (r_1 + r_2)|\dot{\varphi}|$ — величина скорости центра диска, J_{Az} — момент инерции диска относительно оси, проходящей через точку A и перпендикулярной плоскости диска, $\boldsymbol{\omega}_{\text{д}} = \omega_{\text{д}}\boldsymbol{e}_z$ — угловая скорость диска. Диск катится по окружности без скольжения, поэтому скорость точки диска, совпадающей в данный момент с точкой касания C, равна нулю. Тогда из формулы Эйлера $\boldsymbol{v}_A = [\boldsymbol{\omega}_{\text{д}} \times \overrightarrow{CA}]$ получаем

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{д}} = \frac{(r_1 + r_2)\dot{\varphi}}{r_2}\boldsymbol{e}_z.$$

Кинетическая энергия диска равна

$$T_{д} = \frac{m_1}{2}(r_1+r_2)^2\dot\varphi^2 + \frac{m_1 r_2^2}{4}\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\right)^2\dot\varphi^2 = \frac{3}{4}m_1(r_1+r_2)^2\dot\varphi^2.$$

В результате теорема об изменении кинетической энергии системы принимает вид

$$d\left[\frac{m_2(r_1+r_2)^2}{6}\dot\varphi^2 + \frac{3}{4}m_1(r_1+r_2)^2\dot\varphi^2\right] = L d\varphi.$$

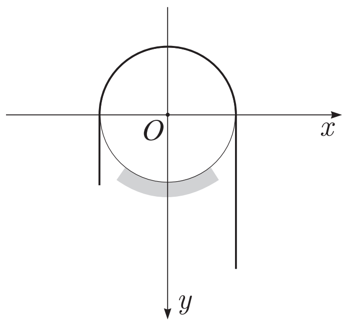
Интегрируя, получаем

$$\frac{9m_1+2m_2}{12}(r_1+r_2)^2\dot\varphi^2 = L\varphi + \mathrm{const}.$$

Будем считать, что угловая скорость $\omega = \dot\varphi$ кривошипа равна нулю, когда $\varphi = 0$. Таким образом, искомая зависимость ω от φ имеет вид

$$\omega = \frac{2}{r_1+r_2}\sqrt{\frac{3L}{9m_1+2m_2}}.$$

Пример 6. *Однородная нерастяжимая весомая нить массы m и длины $2l$, висевшая на гладком цилиндре радиуса r с горизонтальной осью и находящаяся в равновесии, начинает движение со скоростью v_0. Найти скорость движения нити в тот момент, когда она сойдет с цилиндра. Свободные концы нити не раскачиваются.*



К примеру 6.

Решение. Движение нити происходит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Введем неподвижную систему координат $Oxyz$ с началом в точке O, лежащей на оси цилиндра, плоскость Oxy является плоскостью движения нити, ось Oy направлена по вертикали вниз, ось Oz направлена вдоль оси цилиндра.

Связи, наложенные на систему, идеальны и не зависят от времени, заданная сила (сила тяжести) имеет силовую функцию, следовательно, полная механическая энергия системы сохраняется. Уравнение движение можно получить из интеграла энергии

$$\frac{mv^2}{2} - mgy_C = h$$

или

$$\frac{mv^2}{2} - mgy_C = \frac{mv_0^2}{2} - mgy_C(0),$$

где v — скорость нити, y_C — ордината центра масс C нити, h — постоянная интеграла энергии. В начальный момент центр масс нити можно найти как центр масс двух одинаковых параллельных отрезков нити длины

$l - \dfrac{\pi r}{2}$ и массы $\dfrac{m}{2l}\left(l - \dfrac{\pi r}{2}\right)$, центр масс которых находится на оси Oy и имеет ординату

$$y_{\|} = \frac{1}{2}\left(l - \frac{\pi r}{2}\right),$$

и отрезка нити, охватывающей цилиндр по полуокружности, массы $\dfrac{m\pi r}{2l}$, ордината центра масс которого равна

$$y_{\frown} = -\frac{2r}{\pi}$$

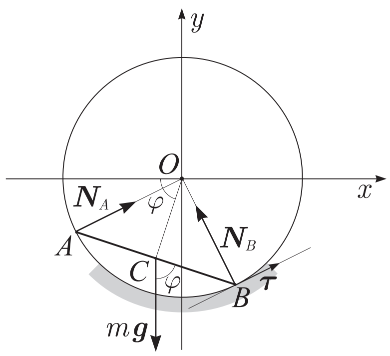
(доказать). Отсюда в начальный момент центр масс нити имеет ординату

$$y_C(0) = \frac{1}{2l}\left(l - \frac{\pi r}{2}\right)^2 - \frac{r^2}{l}.$$

В момент схода нити с цилиндра $y_C = l$. Таким образом, из интеграла энергии следует, что

$$v = \sqrt{v_0^2 + g\left(l + \pi r - \frac{r^2}{l}\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)\right)}.$$

Пример 7. *Однородный стержень AB массы m и длины $2l$ скользит своими концами без трения по неподвижной вертикальной окружности радиуса $r = \sqrt{2}l$ под действием силы тяжести. Найти реакции в точках контакта стержня с окружностью как функции угла φ, образованного отрезком OC, соединяющим центр O окружности с центром C стержня, с горизонтом. В начальный момент стержень покоился и радиус OA был горизонтален.*



К примеру 7.

Решение. Введем неподвижную систему координат $Oxyz$ с началом в центре O окружности так, что ось Ox лежит в плоскости окружности и горизонтальна, ось Oy направлена по вертикали вверх, ось Oz перпендикулярна плоскости окружности и дополняет Ox и Oy до правой тройки.

Освободим систему от связей, то есть будем рассматривать стержень как свободное тело, находящееся под действием заданной силы $m\boldsymbol{g}$ (силы тяжести) и неизвестных реакций связей $\boldsymbol{N}_A$ и $\boldsymbol{N}_B$, в силу гладкости связей, направленных по радиусам окружности в точках A и B. Выпишем теорему о движении центра масс C стержня

$$m\boldsymbol{a}_C = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N}_A + \boldsymbol{N}_B,$$

где $\boldsymbol{a}_C$ — ускорение центра масс стержня. Найдя выражение для ускорения центра масс стержня как функцию указанного в условии угла φ, можно будет вычислить и искомые реакции N_A и N_B, например, из уравнений, представляющих проекции векторного уравнения движения центра масс на касательную и нормаль к окружности в точке B. Поскольку $\triangle AOB$ прямоугольный, в каждое из уравнений войдет по одной неизвестной реакции

$$ma_\tau = -mg\cos\gamma + N_A,$$
$$ma_\nu = -mg\sin\gamma + N_B,$$

где a_τ и a_ν— проекции ускорения центра масс на касательную и нормаль к окружности в точке B соответственно, угол $\gamma = \left(\pi - \dfrac{\pi}{4} - \varphi\right)$ — угол, образованный касательной с вертикалью. Таким образом, реакции определятся из уравнений

$$ma_\tau = mg\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) + N_A,$$
$$ma_\nu = -mg\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) + N_B.$$

Центр масс C стержня движется по окружности радиуса OC, ускорение точки C представляется суммой центростремительного и вращательного ускорений

$$\boldsymbol{a}_C = -\dot\varphi^2\overrightarrow{OC} + \ddot\varphi|\overrightarrow{OC}|\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|},$$

откуда

$$a_\tau = \frac{\sqrt{2}}{2}l\dot\varphi^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}l\ddot\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}l(\dot\varphi^2 + \ddot\varphi),$$
$$a_\nu = \frac{\sqrt{2}}{2}l\dot\varphi^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}l\ddot\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}l(\dot\varphi^2 - \ddot\varphi).$$

Для нахождения $\ddot\varphi$ и $\dot\varphi$ можно воспользоваться либо теоремой об изменении кинетического момента относительно оси Oz, либо теоремой об изменении кинетической энергии. Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента относительно оси Oz. Вычислим кинетический момент стержня относительно оси Oz, используя формулу Кенига,

$$(\boldsymbol{K}_O, \boldsymbol{e}_z) = \big((m[\overrightarrow{OC} \times \boldsymbol{v}_C] + I_{Cz}\omega\boldsymbol{e}_z), \boldsymbol{e}_z\big) = ml^2\dot\varphi + \frac{ml^2}{3}\dot\varphi,$$

где I_{Cz} — момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс стержня и перпендикулярной плоскости движения, $\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\boldsymbol{e}_z$ — угловая скорость стержня. Момент сил относительно оси Oz равен

$$\big(([\overrightarrow{OC} \times m\boldsymbol{g}] + [\overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{N}_A] + [\overrightarrow{OB} \times \boldsymbol{N}_B]), \boldsymbol{e}_z\big) = mgl\cos\varphi.$$

Записав теорему об изменении кинетического момента стержня относительно оси Oz

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}ml^2\dot\varphi\right) = mg\cos\varphi,$$

находим выражение для углового ускорения

$$\ddot\varphi = \frac{3}{4}\frac{g}{l}\cos\varphi.$$

Понижая порядок последнего уравнения, переходя к дифференцированию по φ, имеем

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{\dot\varphi^2}{2} = \frac{3}{4}\frac{g}{l}\cos\varphi.$$

Отсюда с учетом начальных данных

$$\dot\varphi^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\left(\sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

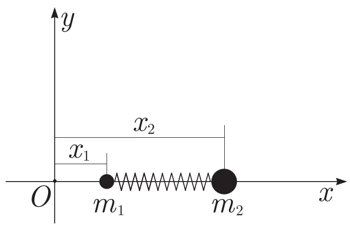
После подстановки найденных выражений для $\ddot\varphi$ и $\dot\varphi$ как функций угла φ в уравнения для реакций получаем

$$N_A = -mg\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right) + ma_\tau =$$
$$= -mg\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi) + m\frac{\sqrt{2}}{2}l\left(\frac{3}{2}\frac{g}{l}\left(\sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{3}{4}\frac{g}{l}\cos\varphi\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{8}mg(10\sin\varphi - \cos\varphi - 3\sqrt{2});$$

$$N_B = mg\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right) + ma_\nu =$$
$$= mg\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi) + m\frac{\sqrt{2}}{2}l\left(\frac{3}{2}\frac{g}{l}\left(\sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{3}{4}\frac{g}{l}\cos\varphi\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{8}mg(10\sin\varphi + \cos\varphi - 3\sqrt{2}).$$

Получите результат, используя теорему об изменении кинетической энергии.

Пример 8. *Найти движение системы, состоящей из двух масс m_1 и m_2, насаженных на гладкий горизонтальный стержень (ось Ox); массы связаны пружиной жесткости c и могут двигаться поступательно вдоль стержня. Расстояние между центрами масс при ненапряженной пружине равно l. Состояние системы в начальный момент определяется следующими значениями координат и скоростей центров масс $x_1 = 0$, $\dot x_1 = u_0$, $x_2 = l$, $\dot x_2 = 0$.*



К примеру 8.

Решение. Положение системы определяется двумя координатами: x_1 и x_2. Уравнения движения могут быть получены из теоремы об изменении количества движения системы в проекции на ось Ox (связи идеальны и допускают поступательное перемещение системы как твердого тела вдоль стержня)

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot x_1 + m_2\dot x_2) = 0 \qquad \text{или} \qquad m_1\ddot x_1 + m_2\ddot x_2 = 0$$

и теоремы об изменении кинетической энергии (связи идеальны и не зависят от времени)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\dot{x}_1^2}{2}+\frac{m_2\dot{x}_2^2}{2}\right)=\frac{dU}{dt},$$

где $U=-\dfrac{c(x_2-x_1-l)^2}{2}$ — силовая функция упругой силы. Из первого уравнения следует первый интеграл

$$m_1\dot{x}_1+m_2\dot{x}_2=m_1u_0,$$

откуда получаем

$$m_1x_1+m_2x_2=m_1u_0t+m_2l.$$

Второе уравнение после дифференцирования принимает вид

$$m_1\dot{x}_1\ddot{x}_1+m_2\dot{x}_2\ddot{x}_2=-c(x_2-x_1-l)(\dot{x}_2-\dot{x}_1)$$

или с учетом того, что $\ddot{x}_2=-\dfrac{m_1}{m_2}\ddot{x}_1$,

$$m_1\ddot{x}_1(\dot{x}_1-\dot{x}_2)=-c(x_2-x_1-l)(\dot{x}_2-\dot{x}_1).$$

Поскольку $\dot{x}_1-\dot{x}_2\neq 0$ (почему?), имеем

$$m_1\ddot{x}_1=c(x_2-x_1-l).$$

Используя выражение для x_2 через x_1 и время t

$$x_2=-\frac{m_1}{m_2}x_1+\frac{m_1u_0}{m_2}t+l,$$

получаем дифференциальное уравнение для x_1

$$\ddot{x}_1=-\omega^2x_1+\frac{cu_0}{m_2}t,\qquad \omega^2=c\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right).$$

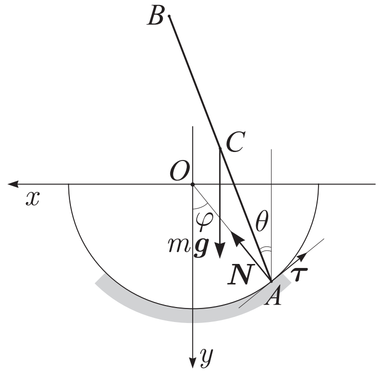
Решая это линейное неоднородное дифференциальное уравнение, находим

$$x_1=\frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1u_0t+\frac{m_2u_0}{\omega}\sin\omega t\right).$$

Для x_2 прямой подстановкой имеем

$$x_2=l+\frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1u_0t-\frac{m_1u_0}{\omega}\sin\omega t\right).$$

Пример 9. *Однородный стержень AB массы m и длины $2l$ движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести, скользя концом A по внутренней стороне гладкой полуокружности радиуса r. Составить уравнения движения стержня.*



К примеру 9.

Решение. Введем неподвижную систему координат $Oxyz$ с началом в центре O окружности, ось Ox горизонтальна и лежит в плоскости движения стержня, ось Oy направлена по вертикали вниз, ось Oz перпендикулярна плоскости движения и дополняет Ox и Oy до правой тройки.

Положение конца A стержня и угол θ, составляющий стержнем с вертикалью, определяют положение стержня в любой момент времени. Положение конца A можно задать углом φ между радиусом OA окружности и вертикалью. Таким образом, система имеет две степени свободы.

Так как связи, наложенные на систему, идеальны и не зависят от времени, а заданная сила (сила тяжести) допускает силовую функцию, то по теореме об изменении кинетической энергии имеет место интеграл энергии

$$T = U + h.$$

Здесь T — кинетическая энергия стержня, U — силовая функция силы тяжести, h — постоянная интеграла энергии. Кинетическую энергию стержня найдем по формуле Кенига

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{1}{2} I_{Cz}\omega^2,$$

где $\boldsymbol{v}_C$ — скорость центра масс C стержня, $I_{Cz} = \dfrac{ml^2}{3}$ — момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс C и перпендикулярной плоскости движения, $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_z$ — угловая скорость стержня. Скорость центра масс по формуле Эйлера представляется в виде

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AC}].$$

Точка A движется по окружности, поэтому $\boldsymbol{v}_A = r\dot{\varphi}\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau}$ — единичный касательный вектор к окружности в точке A. Легко видеть, что

$$v_C^2 = r^2\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2rl\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\varphi - \theta).$$

Силовая функция силы тяжести равна

$$U = mgy_C = mg(r\cos\varphi - l\cos\theta),$$

где y_C — ордината центра масс стержня. Таким образом, закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{m}{2}\Big(r^2\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2rl\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\varphi-\theta)\Big) + \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2 = mg(r\cos\varphi - l\cos\theta) + h.$$

Для получения второго уравнения движения воспользуемся теоремой о движении центра масс C

$$m\boldsymbol{a}_C = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N},$$

где $\boldsymbol{a}_C$ — ускорение центра масс, $\boldsymbol{N}$ — реакция связи в точке A. Проекция этого векторного уравнения на касательную к окружности в точке A имеет вид

$$m(\boldsymbol{a}_C, \boldsymbol{\tau}) = -mg\sin\varphi.$$

Ускорение точки C определяем по формуле Ривальса

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_A + [\boldsymbol{\varepsilon}\times\overrightarrow{AC}] - \omega^2\overrightarrow{AC}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}.$$

Ускорение точки A равно

$$\boldsymbol{a}_A = r\ddot{\varphi}\boldsymbol{\tau} + r\dot{\varphi}^2\boldsymbol{\nu},$$

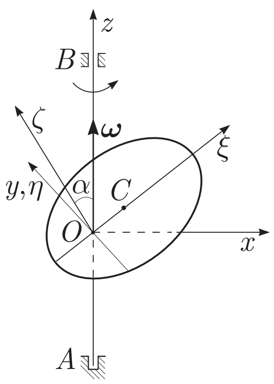
где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор внутренней нормали к окружности в точке A. Тогда проекция ускорения точки C на касательную равна

$$(\boldsymbol{a}_C, \boldsymbol{\tau}) = r\ddot{\varphi} - l\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta) - l\dot{\theta}^2\sin(\varphi-\theta).$$

Таким образом, второе уравнение движения принимает вид

$$r\ddot{\varphi} - l\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta) - l\dot{\theta}^2\sin(\varphi-\theta) = -g\sin\varphi.$$

Пример 10. *Однородный круглый диск массы m и радиуса R вращается без трения с угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси AB, проходящей через точку O диска и составляющей с нормалью к плоскости диска угол α. Расстояние от центра C диска до точки O равно $OC = e$. Прямые AB, OC и нормаль к плоскости диска лежат в одной плоскости. Найти реакции в подшипниках A и B, если $OA = a$, $OB = b$.*



К примеру 10.

Решение. Искомые реакции в подшипниках $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$ удовлетворяют уравнениям движения диска, следующим из теоремы об изменении кинетического момента относительно точки O и теоремы о движении центра масс

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = [\overrightarrow{OC} \times m\boldsymbol{g}] + [\overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{R}_A] + [\overrightarrow{OB} \times \boldsymbol{R}_B],$$

$$m\boldsymbol{a}_C = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{R}_B,$$

где $\boldsymbol{K}_O$ — кинетический момент диска относительно точки O, $\boldsymbol{a}_C$ — ускорение центра масс C диска.

Введем подвижную систему координат $Oxyz$ с началом в точке O, ось Oz которой совпадает с неподвижной вертикальной осью вращения AB, ось Ox лежит в плоскости ACB, ось Oy дополняет Ox и Oz до правой тройки. Заметим, что ось Oy лежит в плоскости диска и ортогональна диаметру, проходящему через точку O. Также введем подвижную систему координат $O\xi\eta\zeta$, получаемую поворотом осей $Oxyz$ вокруг оси Oy на угол α по часовой стрелке. Тогда диаметр диска, проходящий через точку O, лежит на оси $O\xi$, а $O\zeta$ — нормаль к плоскости диска. Единичные векторы подвижных систем координат $Oxyz$ и $O\xi\eta\zeta$ будем обозначать $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ и $\boldsymbol{e}_\xi$, $\boldsymbol{e}_\eta$, $\boldsymbol{e}_\zeta$ соответственно. Подвижные системы координат $Oxyz$ и $O\xi\eta\zeta$ вращаются вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_z$.

Оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ представляют собой главные оси инерции однородного диска относительно точки O (почему?), следовательно, кинетический момент диска относительно точки O равен

$$\boldsymbol{K}_O = I_{O\xi}\omega_\xi\boldsymbol{e}_\xi + I_{O\eta}\omega_\eta\boldsymbol{e}_\eta + I_{O\zeta}\omega_\zeta\boldsymbol{e}_\zeta,$$

где $I_{O\xi}$, $I_{O\eta}$, $I_{O\zeta}$ — моменты инерции диска относительно осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; ω_ξ, ω_η, ω_ζ — проекции вектора угловой скорости на оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ соответственно. Поскольку

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_z = \omega\sin\alpha\boldsymbol{e}_\xi + \omega\cos\alpha\boldsymbol{e}_\zeta,$$

а $I_{O\xi} = \dfrac{mr^2}{4}$, $I_{O\zeta} = \dfrac{mR^2}{2} + me^2$, получаем

$$\boldsymbol{K}_O = \frac{mR^2}{4}\omega\sin\alpha\boldsymbol{e}_\xi + \left(\frac{mR^2}{2} + me^2\right)\omega\cos\alpha\boldsymbol{e}_\zeta.$$

С учетом того, что

$$\boldsymbol{e}_\xi = \cos\alpha\boldsymbol{e}_x + \sin\alpha\boldsymbol{e}_z,$$

$$\boldsymbol{e}_\zeta = -\sin\alpha\boldsymbol{e}_x + \cos\alpha\boldsymbol{e}_z,$$

вектор кинетического момента диска относительно точки O (в абсолютном движении) принимает вид

$$\boldsymbol{K}_O = -\left(\frac{mR^2}{4} + me^2\right)\sin\alpha\cos\alpha\omega\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{mR^2}{4} + \left(\frac{mR^2}{4} + me^2\right)\cos^2\alpha\right)\omega\boldsymbol{e}_z.$$

Производная кинетического момента по времени равна

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = -\left(\frac{mR^2}{4} + me^2\right)\sin\alpha\cos\alpha\dot{\omega}\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{mR^2}{4} + \left(\frac{mR^2}{4} + me^2\right)\cos^2\alpha\right)\dot{\omega}\boldsymbol{e}_z -$$
$$-\left(\frac{mR^2}{4} + me^2\right)\omega\sin\alpha\cos\alpha\dot{\boldsymbol{e}}_x + \left(\frac{mR^2}{4} + \left(\frac{mR^2}{4} + me^2\right)\cos^2\alpha\right)\omega\dot{\boldsymbol{e}}_z.$$

Система координат $Oxyz$ вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$, поэтому

$$\dot{\boldsymbol{e}}_x = [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_x] = \omega \boldsymbol{e}_y, \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_z = [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_z] = 0$$

и

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = -\left(\frac{mR^2}{4} + me^2\right) \sin\alpha \cos\alpha \dot{\omega} \boldsymbol{e}_x +$$
$$+ \left(\frac{mR^2}{4} + \left(\frac{mR^2}{4} + me^2\right) \cos^2\alpha\right) \dot{\omega} \boldsymbol{e}_z - \left(\frac{mR^2}{4} + me^2\right) \sin\alpha \cos\alpha \omega^2 \boldsymbol{e}_y.$$

Считая, что в точке A — сферический шарнир, а в точке B — цилиндрический, представим неизвестные реакции в подшипниках в виде

$$\boldsymbol{R}_A = R_{Ax}\boldsymbol{e}_x + R_{Ay}\boldsymbol{e}_y + R_{Az}\boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{R}_B = R_{Bx}\boldsymbol{e}_x + R_{By}\boldsymbol{e}_y.$$

Тогда моменты силы тяжести и реакций относительно точки O равны

$$[\overrightarrow{OC} \times m\boldsymbol{g}] = -[(e\cos\alpha \boldsymbol{e}_x + e\sin\alpha \boldsymbol{e}_z) \times mg\boldsymbol{e}_z] = mge\cos\alpha \boldsymbol{e}_y,$$
$$[\overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{R}_A] = [-a\boldsymbol{e}_z \times (R_{Ax}\boldsymbol{e}_x + R_{Ay}\boldsymbol{e}_y + R_{Az}\boldsymbol{e}_z)] = -aR_{Ax}\boldsymbol{e}_y + aR_{Ay}\boldsymbol{e}_x,$$
$$[\overrightarrow{OB} \times \boldsymbol{R}_B] = [b\boldsymbol{e}_z \times (R_{Bx}\boldsymbol{e}_x + R_{By}\boldsymbol{e}_y)] = bR_{Bx}\boldsymbol{e}_y - bR_{By}\boldsymbol{e}_x.$$

Таким образом, по теореме об изменении кинетического момента относительно точки O получаем систему уравнений

$$-\left(\frac{mR^2}{4} + me^2\right) \sin\alpha \cos\alpha \dot{\omega} = aR_{Ay} - bR_{By},$$
$$-\left(\frac{mR^2}{4} + me^2\right) \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha = mge\cos\alpha - aR_{Ax} + bR_{Bx},$$
$$\left(\frac{mR^2}{4} + \left(\frac{mR^2}{4} + me^2\right) \cos^2\alpha\right) \dot{\omega} = 0.$$

Из последнего уравнения системы следует, что $\omega = \mathrm{const}$, то есть диск вращается вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью. Тогда

$$0 = aR_{Ay} - bR_{By},$$
$$-\left(\frac{mR^2}{4} + me^2\right) \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha = mge\cos\alpha - aR_{Ax} + bR_{Bx}.$$

Поскольку плоскость Oxz также вращается вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$, центр масс C диска как точка плоскости Oxz движется по окружности радиуса $e\cos\alpha$ и ее ускорение равно

$$\boldsymbol{a}_C = -e\cos\alpha \omega^2 \boldsymbol{e}_x.$$

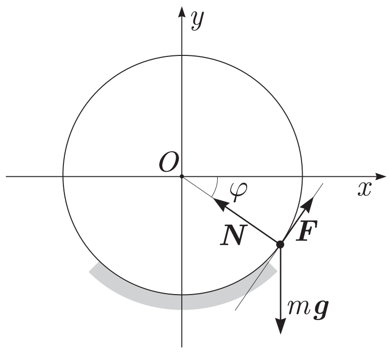
Согласно теореме о движении центра масс в проекциях на оси системы координат $Oxyz$ получаем

$$-me\cos\alpha \omega^2 = R_{Ax} + R_{Bx},$$
$$0 = R_{Ay} + R_{By},$$
$$0 = R_{Az} - mg.$$

Решая выписанные уравнения совместно, находим неизвестные компоненты реакций в подшипниках

$$
\begin{aligned}
R_{Ax} &= \frac{m\omega^2\cos\alpha}{a+b}\left[\left(\frac{R^2}{4}+e^2\right)\sin\alpha - eb\right] + \frac{mge\cos\alpha}{a+b},\\
R_{Bx} &= -\frac{m\omega^2\cos\alpha}{a+b}\left[\left(\frac{R^2}{4}+e^2\right)\sin\alpha + ea\right] - \frac{mge\cos\alpha}{a+b},\\
&R_{Ay} = R_{By} = 0,\\
&R_{Az} = mg.
\end{aligned}
$$

Пример 11. *Тяжелая точка движется по вертикальной шероховатой окружности радиуса r, выходя из конца горизонтального диаметра без начальной скорости. Зная коэффициент трения скольжения f, найти скорость, с которой точка достигнет наинизшего положения.*



К примеру 11.

Решение. Определяя положение точки на окружности углом φ, выпишем ее уравнения движения в проекции на касательную и нормаль к окружности

$$
\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= mg\cos\varphi - F,\\
m\frac{v^2}{r} &= -mg\sin\varphi + N,
\end{aligned}
$$

где N — нормальная реакция связи, $F = fN$ — сила трения.

Выражая нормальную реакцию из второго уравнения и подставляя найденное выражение в первое, получаем

$$\frac{dv}{dt} = -f\frac{v^2}{r} + g(\cos\varphi - f\sin\varphi).$$

Поскольку

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{v}{r} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2/r)}{d\varphi},$$

из последнего соотношения следует дифференциальная связь между скоростью точки v и углом φ, определяющим ее положение,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{v^2}{r}\right) = -f\frac{v^2}{r} + g(\cos\varphi - f\sin\varphi).$$

Получили линейное неоднородное уравнение с искомой функцией $\dfrac{v^2}{r}$. Его решение представляется как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решение неоднородного, которое можно найти в виде $A\sin\varphi + B\cos\varphi$. Общее решение однородного уравнения

$$\frac{v^2}{r} = Ce^{-2f\varphi},$$

где C — произвольная постоянная. Подставляя частное решение в уравнение, находим значения для A и B

$$A = 2g\frac{1-2f^2}{1+4f^2}, \qquad B = 6g\frac{f}{1+4f^2}.$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\frac{v^2}{r} = Ce^{-2f\varphi} + 2g\frac{1-2f^2}{1+4f^2}\sin\varphi + 6g\frac{f}{1+4f^2}\cos\varphi.$$

Из начальных данных $v = 0$ при $\varphi = 0$ следует

$$C = -6g\frac{f}{1+4f^2}.$$

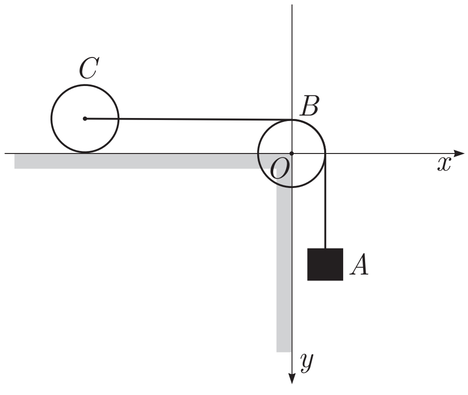
Отсюда

$$\frac{v^2}{r} = -\frac{6gf}{1+4f^2}e^{-2f\varphi} + \frac{2g}{1+4f^2}\left((1-2f^2)\sin\varphi + 3f\cos\varphi\right).$$

При $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ точка достигнет наинизшего положения и ее скорость примет значение

$$v = \sqrt{\frac{2gr}{1+4f^2}\,(1-2f^2-3e^{-f\pi})}.$$

Пример 12. *Груз A массы m_1 подвешен к однородному нерастяжимому канату массы m_2 длины L. Канат переброшен через блок B, вращающийся вокруг оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа. Канат по блоку не проскальзывает. Второй конец каната прикреплен к оси катка C, катящегося без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости. Блок B и каток C — однородные круглые диски массы m_3 радиуса r. Коэффициент трения качения катка C о горизонтальную плоскость равен f_k. В начальный момент система покоилась и с блока B свисала часть каната длины l. Определить скорость груза A в зависимости от его вертикального перемещения h.*



К примеру 12.

Решение. Введем неподвижную систему координат $Oxyz$ с началом в центре O блока B, ось Ox горизонтальна и лежит в плоскости движения системы, Oy направлена по вертикали вниз, ось Oz перпендикулярна плоскости движения и дополняет Ox и Oy до правой тройки.

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы, ее положение в любой момент времени может быть задано вертикальной координатой груза A — координатой y. Для получения уравнения движения воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии $dT = dA$, где T — кинетическая энергия системы, dA — элементарная работа всех заданных сил и реакций связей на действительных перемещениях точек системы, в которых они приложены.

Кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий отдельных частей системы:

груза A: $\quad T_{\text{гр}} = \dfrac{m_1\dot{y}^2}{2};$

каната: $\quad T_{\text{кан}} = \dfrac{m_2\dot{y}^2}{2};$

блока: $\quad T_{\text{бл}} = \dfrac{1}{2}I_{\text{бл}}\omega_{\text{бл}}^2 = \dfrac{m_3\dot{y}^2}{4};$

катка: $\quad T_{\text{к}} = \dfrac{m_3v_C^2}{2} + \dfrac{1}{2}I_{\text{к}}\omega_{\text{к}}^2 = \dfrac{m_3\dot{y}^2}{2} + \dfrac{m_3\dot{y}^2}{4} = \dfrac{3m_3\dot{y}^2}{4}.$

Здесь $I_{\text{бл}} = \dfrac{m_3r^2}{2}$ — момент инерции блока относительно оси Oz, $\boldsymbol{\omega}_{\text{бл}} = \dfrac{\dot{y}}{r}\boldsymbol{e}_z$ — угловая скорость блока, $\boldsymbol{v}_C$ — скорость центра масс катка, $I_{\text{к}} = \dfrac{m_3r^2}{2}$ — момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс катка и перпендикулярной его плоскости, $\boldsymbol{\omega}_{\text{к}} = \dfrac{\dot{y}}{r}\boldsymbol{e}_z$ — угловая скорость катка.

Взаимодействие катка с прямой, по которой он катится без скольжения, сводится к реакции, приложенной к катку в точке контакта,

$$\boldsymbol{R} = -R_x\boldsymbol{e}_x - R_y\boldsymbol{e}_y$$

и паре сил с моментом силы трения качения

$$\boldsymbol{M} = -f_kR_y\frac{\boldsymbol{\omega}_{\text{к}}}{|\boldsymbol{\omega}_{\text{к}}|}.$$

Элементарная работа dA представляется суммой работ сил тяжести, действующих на груз A и канат, и работы трения качения, равной $-f_kR_y\dfrac{dy}{r}$, (почему?). Элементарная работа сил тяжести, поскольку эти силы потенциальны, равна $dU_1 + dU_2$, где $U_1 = m_1gy$, $U_2 = m_2gy_2$ — силовые функции для груза и каната соответственно, y_2 — ордината центра масс каната. Координата y_2, исходя из определения центра масс, может быть найдена как координата центра масс трех отрезков каната: горизонтального, вертикального и дугообразного облегающего блок. Массы этих отрезков соответственно равны: $\dfrac{m_2}{L}\left(L - y - \dfrac{\pi r}{2}\right)$, $\dfrac{m_2}{L}y$, $\dfrac{m_2}{L}\dfrac{\pi r}{2}$, а ординаты их центров масс — $(-r)$, $\dfrac{y}{2}$, $y_\frown$. Таким образом, элементарная работа представляется в виде

$$dA = m_1gdy + m_2g\,d\Bigg(-\frac{r}{L}\left(L - y - \frac{\pi r}{2}\right) + \frac{y^2}{2L} + \frac{\pi r}{2L}y_\frown\Bigg) - \frac{f_kR_y}{r}dy.$$

Заметим, что $y_\frown$ постоянна и ее можно не вычислять.

Для определения величины нормальной составляющей реакции R_y выпишем теорему об изменении кинетического момента относительно наивысшей точки блока B для части системы, состоящей из катка и горизонтального участка каната. Поскольку скорости точек горизонтального участка каната направлены вдоль этого участка, его кинетический момент относительно наивысшей точки блока B равен нулю. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_3 r^2}{2}\omega\right) = -m_3 g\left(L - y - \frac{\pi r}{2}\right) - \frac{m_2 g}{2L}\left(L - y - \frac{\pi r}{2}\right)^2 + R_y\left(L - y - \frac{\pi r}{2}\right) + R_x r - f_k R_y,$$

справа выписана сумма моментов сил тяжести катка и участка каната, составляющих реакции относительно наивысшей точки блока B и трения качения. Из теоремы об изменении кинетического момента катка относительно центра масс получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_3 r^2}{2}\omega\right) = R_x r - f_k R_y.$$

Из этих двух уравнений определяем величину нормальной составляющей реакции

$$R_y = m_3 g + \frac{m_2 g}{2L}\left(L - y - \frac{\pi r}{2}\right).$$

Теперь теорема об изменении кинетической энергии принимает вид

$$d\left(\frac{1}{2}(m_1 + m_2 + 2m_3)\dot{y}^2\right) = m_1 g dy + m_2 g\, d\left(\frac{ry}{L} + \frac{y^2}{2L}\right) - \frac{f_k}{r}\left(m_3 g + \frac{m_2 g}{2L}\left(L - y - \frac{\pi r}{2}\right)\right) dy.$$

Интегрируя левую часть полученного уравнения в пределах от 0 до v, а правую — от l до $l + h$, находим выражение для скорости груза в зависимости от его вертикального перемещения h

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2 + 2m_3)v^2 = gh\left[m_1 + \frac{m_2}{2L}(2r + 2l + h) - \frac{f_k}{r}\left(m_3 + m_2\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi r}{4L} - \frac{l}{2L} - \frac{h}{4L}\right)\right)\right].$$

Таким образом,

$$v = \sqrt{\frac{2gh\left[m_1 + \frac{m_2}{2L}(2r + 2l + h) - \frac{f_k}{r}\left(m_3 + m_2\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi r}{4L} - \frac{l}{2L} - \frac{h}{4L}\right)\right)\right]}{m_1 + m_2 + 2m_3}}.$$

Указания к задачам главы 2 "Динамика системы материальных точек" сборника "Задачи по теоретической механике"

2.85. Воспользоваться теоремой о движении центра масс системы в проекции на горизонталь.

2.86. Воспользоваться теоремой об изменении количества движения в проекции на горизонталь для незакрепленного мотора, а затем для закрепленного. Незакрепленный мотор не будет подпрыгивать над фундаментом, если нормальная реакция связи неотрицательна.

2.87. Воспользоваться теоремой о движении центра масс системы.

2.88. Воспользоваться законом сохранения кинетического момента относительно вертикальной оси, проходящей через точку O (ось вращения).

2.89. Воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента относительно оси z.

2.90. Воспользоваться интегралом теоремы о движении центра масс, законом сохранения кинетического момента системы относительно центра масс и законом сохранения энергии.

2.91. Воспользоваться законом сохранения кинетического момента системы относительно вертикальной оси, проходящей через центр окружности. Можно ли получить результат из теоремы об изменении кинетической энергии?

2.92. Воспользоваться теоремой о движении центра масс и теоремой об изменении кинетической энергии (или теоремой об изменении кинетического момента относительно центра масс диска).

2.93. См. **2.92.**

2.94. См. **2.92.**

2.95. См. **2.92.**

2.96. Воспользоваться интегралом энергии.

2.97. Воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии для системы.

2.98. Воспользоваться законом сохранения энергии для системы.

2.99. Воспользоваться теоремой о движении центра масс в проекции на горизонталь, законом сохранения энергии и теоремой о движении центра масс в проекции на вертикаль.

2.100. Воспользоваться законом сохранения кинетического момента относительно вертикали, проходящей через неподвижный конец, и законом сохранения энергии.

2.101. Воспользоваться законом сохранения энергии для каждого из указанных случаев движения.

2.102. Найти угловую скорость и угловое ускорение физического маятника либо из теоремы об изменении кинетического момента относительно неподвижной оси вращения, либо из интеграла энергии. Выписать теорему о движении центра масс в проекциях на указанные направления.

2.103. Воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента относительно оси подвеса (оси вращения) в каждом из указанных случаев и сравнить уравнения.

2.104. Воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии.

2.105. Воспользоваться законом сохранения энергии и теоремой о движении центра масс. Необходимым условием отрыва стержня об стены является обращение реакции в точке A в нуль.

2.106. Для освободившегося стержня выписать закон сохранения энергии и теорему о движении центра масс в проекции на горизонталь. В качестве начальных данных взять конечное состояние (в момент отрыва) стержня в задаче 2.105.

2.107. Воспользоваться теоремой о движении центра масс в проекции на вертикаль в момент обрыва нити и теоремой об изменении кинетического момента относительно центра масс в тот же момент.

2.108. Воспользоваться теоремой о движении центра масс в проекции на натянутую нить в момент обрыва другой и теоремой об изменении кинетического момента относительно центра масс в тот же момент.

2.109. Воспользоваться законом сохранения энергии и теоремой о движении центра масс в проекции на нормаль к цилиндру в точке B. В момент отделения цилиндра от площадки нормальная составляющая реакции обращается в нуль.

2.110. Разрезав нить и добавив в число внешних сил натяжение нити, выписать для каждого цилиндра теорему о движении центра масс в проекции на наклонную плоскость и теорему об изменении кинетического момента относительно центра масс.

2.111. Воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента относительно оси, проходящей через точку подвеса O и перпендикулярной плоскости движения, и теоремой об изменении кинетической энергии.

2.112. Воспользоваться теоремой о движении центра масс и теоремой об изменении кинетического момента относительно центра масс.

2.113. Воспользоваться теоремой об изменении количества движения в проекции на горизонталь и теоремой об изменении кинетической энергии для системы.

2.114. Воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента относительно неподвижного конца стержня и теоремой об изменении кинетической энергии для системы.

2.115. Воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента относительно оси цилиндра и теоремой об изменении кинетической энергии для системы.

2.116. Воспользоваться теоремой о движении центра масс системы и теоремой об изменении кинетического момента относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс системы.

2.117. Воспользоваться теоремой об изменении количества движения в проекции на наклонную плоскость и нормаль к ней и теоремой об изменении кинетической энергии для системы.

2.118. Найти компоненты угловой скорости в главных центральных осях инерции диска. Выписать компоненты кинетического момента в тех же осях.

2.119. Найти компоненты угловой скорости в главных осях инерции диска относительно точки O. Выписать компоненты кинетического момента в тех же осях.

2.120. Воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента, исходя из его представления в главных центральных осях инерции диска (см. 2.118). Доказать, что горизонтальные составляющие реакций в подшипниках составляют пару.

2.121. См. **2.118.**

2.122. См. **2.120.**

2.123. Воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента относительно точки A, исходя из представления кинетического момента в главных осях инерции треугольника относительно точки A.

2.124. Исходя из определения регулярной прецессии, представить компоненты угловой скорости в углах Эйлера и найти кинетический момент. С учетом того, что вектор кинетического момента составляет угол θ с осью динамической симметрии гироскопа, получить соотношение между угловой скоростью собственного вращения гироскопа и угловой скоростью прецессии.

2.125. Используя представление начальной угловой скорости диска в главных центральных осях, найти кинетический момент диска для начального момента времени и угол, который составляет ось прецессии с плоскостью диска. Воспользоваться интегралом $p^2 + q^2 = \mathrm{const}$, представив его через углы Эйлера.

2.126. Воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента для ротора, считая, что кинетический момент направлен по оси ротора.

2.127. Воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента относительно точки O, считая, что кинетический момент направлен по оси гироскопа.

2.128. Воспользоваться теоремой о движении центра масс и теоремой об изменении кинетического момента относительно точки A (или относительно центра масс) в момент обрыва нити.

2.129. В дифференциальном уравнении движения понизить порядок, перейдя к независимой переменной x. Получить зависимость между скоростью бруска и пройденным путем.

2.130. Выписать уравнение движения в проекции на касательную к окружности, имея в виду, что сила трения пропорциональна результирующей нормальной реакции. Получить дифференциальную связь между скоростью шарика и углом, задающим его положение на окружности.

2.131. Доказать, что точка движется по вертикальной окружности. Выписать уравнения движения в проекции на касательную и нормаль к этой окружности. Получить дифференциальную связь между скоростью точки и углом, задающим ее положение на окружности.

2.132. Выписать уравнение движения вдоль наклонной и получить зависимость между скоростью бруска и пройденным путем.

2.133. См. **2.129.**

2.134. Доказать, что точка остается в плоскости меридиана. Выписать уравнения движения в проекции на касательную и нормаль к окружности. Получить дифференциальную связь между скоростью точки и углом φ, задающим ее положение на окружности. Точка может остановиться на поверхности сферы на участке, задаваемом углами $\varphi \in (0, \varphi_0]$, где $\operatorname{tg}\varphi_0 = f$, при этом нормальная реакция во всех точках указанного промежутка должна быть неотрицательной.

2.135. См. **2.134.**

2.136. Выписать уравнения движения в проекции на оси естественного трехгранника, имея в виду, что нормальная реакция направлена по нормали к поверхности. Из проекции уравнения движения на бинормаль определится нормальная реакция.

2.137. Воспользоваться теоремой о движении центра масс стержня в проекции на горизонталь и вертикаль. Найти нормальные реакции в точках контакта стержня со шкивами, используя теорему об изменении кинетического момента стержня относительно центра масс.

2.138. Воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии отдельно для движения вверх по наклонной плоскости и вниз.

2.139. Воспользоваться теоремой об изменении количества движения и теоремой об изменении кинетической энергии для всей системы.

2.140. Воспользоваться теоремой о движении центра масс цилиндра и теоремой об изменении кинетической энергии (или теоремой об изменении кинетического момента относительно центра масс).

2.141. Воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии для системы.

2.142. См. **2.141.**

2.143. См. **2.140.**

2.144. См. **2.140.**

2.145. См. **2.140.**

2.146. См. **2.140.**

2.147. Воспользоваться теоремой о движении центра масс и теоремой об изменении кинетического момента относительно центра масс.

2.148. См. **2.147.**

2.149. См. **2.147.**

2.150. Воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии.

2.151. Воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии для системы. Найти нормальные реакции в точках контакта катка и ручки с грунтом, используя теорему о движении центра масс и теорему об изменении кинетического момента относительно центра масс для ручки.

2.152. См. **2.147.**