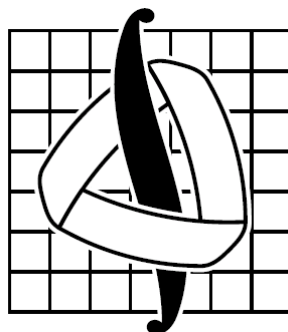


**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**имени М.В. ЛОМОНОСОВА**  
**Механико-математический факультет**  
**Кафедра теоретической механики и мехатроники**



К.Е. Якимова, Т.В. Попова

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
к сборнику ”Задачи по теоретической механике”

**ДИНАМИКА ТОЧКИ**

Москва 2008

**Пример 1.** Материальная точка массы  $m$  движется в однородном поле силы тяжести, испытывая сопротивление среды пропорциональное скорости:  $\mathbf{F}_{\text{сопр}} = -kmg\mathbf{v}$ . Найти закон движения точки и время движения до подъема, высоту подъема, скорость, с которой она вернется в исходное положение, если в начальный момент времени точки сообщили начальную скорость  $v_0$ , направленную вертикально вверх.

*Решение.* Уравнения движения точки получим из второго закона Ньютона

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - kmg\mathbf{v}.$$

В декартовых осях  $Oxyz$ , где  $O$  — исходное положение точки,  $Oz$  — вертикаль, направленная вверх, плоскость  $Oxy$  горизонтальна, уравнения движения на подъеме примут вид

$$m\ddot{x} = -kmg\dot{x},$$

$$m\ddot{y} = -kmg\dot{y},$$

$$m\ddot{z} = -mg - kmg\dot{z}.$$

Из первых двух уравнений, в силу начальных данных

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = v_0$$

следует, что  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  (доказать), то есть точка будет двигаться по вертикальной прямой, проходящей через ее начальное положение, согласно третьему уравнению. Интегрируя последнее, получаем закон движения точки на подъеме

$$z = \frac{1 + kv_0}{k^2g} (1 - \exp(-kgt)) - \frac{t}{k}.$$

Время подъема  $T$  определим из условия обращения в нуль скорости ( $\dot{z} = 0$ )

$$\frac{1 + kv_0}{k} \exp(-kgT) - \frac{1}{k} = 0.$$

Откуда

$$T = \frac{1}{kg} \ln(1 + kv_0),$$

а высота подъема

$$H = z(T) = \frac{v_0}{kg} - \frac{1}{k^2g} \ln(1 + kv_0).$$

Для нахождения скорости точки, с которой она вернется в исходное положение, рассмотрим уравнения движения точки вниз

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - kmg\mathbf{v}$$

с начальными данными  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $z(0) = H$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ ,  $\dot{z}(0) = 0$ . Аналогично случаю движения вверх, точка будет двигаться по вертикальной прямой, проходящей через ее начальное положение, согласно уравнению

$$m\ddot{z} = -mg - kmg\dot{z},$$

при этом  $\dot{z} \leq 0$ . Для ответа на вопрос задачи достаточно найти зависимость скорости ( $v = \dot{z}$ ) от положения  $z$ . Для этого представим ускорение  $\ddot{z}$  в виде

$$\ddot{z} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \dot{z} = v \frac{dv}{dz}.$$

Тогда из последнего уравнения следует

$$v \frac{dv}{dz} = -g(1 + kv).$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\int_0^{v_{\kappa}} \frac{v dv}{1 + kv} = -g \int_H^0 dz,$$

где  $v_{\kappa}$  — скорость, которую приобретет точка в положении  $z = 0$ . Вычисляя интеграл и подставляя значение  $H$ , получаем

$$\frac{v_{\kappa}}{k} - \frac{1}{k^2} \ln(1 + kv_{\kappa}) = \frac{v_0}{k} - \frac{1}{k^2} \ln(1 + kv_0), \quad v_{\kappa} < 0.$$

Откуда связь конечной скорости  $v_{\kappa}$  с начальной  $v_0$  примет вид

$$\exp(k(v_0 - v_{\kappa})) = \frac{1 + kv_0}{1 + kv_{\kappa}}.$$

Это уравнение имеет единственный отрицательный корень  $v_{\kappa}$  (доказать).

**Замечание.** Поскольку движение точки вверх и вниз описывается одним и тем же дифференциальным уравнением, скорость точки, с которой она вернется в исходное положение, можно найти, интегрируя уравнение движения

$$m\ddot{z} = -mg - kmg\dot{z}$$

с начальными данными  $z(0) = 0$ ,  $\dot{z}(0) = v_0$ . Представляя  $\ddot{z}$  в виде

$$\ddot{z} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \dot{z} = v \frac{dv}{dz},$$

получаем

$$v \frac{dv}{dz} = -g(1 + kv),$$

откуда с учетом начальных данных

$$\frac{v}{k} - \frac{1}{k^2} \ln(1 + kv) = -gz + \frac{v_0}{k} - \frac{1}{k^2} \ln(1 + kv_0).$$

В исходном положении  $z = 0$  скорость точки находим из уравнения

$$\exp(k(v_0 - v)) = \frac{1 + kv_0}{1 + kv}.$$

Данное уравнение имеет два решения:  $v = v_0 (> 0)$  — начальная скорость точки и  $v = v_{\kappa} (< 0)$  — скорость, с которой точка вернется в исходное положение.

**Пример 2.** Материальная точка  $M$  массы  $m$  притягивается неподвижным центром  $O$  с силой  $\mathbf{F} = -k^2 m \mathbf{r}$ , где  $k$  — постоянный коэффициент пропорциональности,  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$  — радиус-вектор точки  $M$ . В начальный момент расстояние между точками  $O$  и  $M$  равно  $r_0 = l$ , а скорость  $\mathbf{v}_0$  образует с радиус-вектором  $\mathbf{r}_0$  угол  $\alpha$ . Найти закон движения точки и её траекторию.

*Решение.* Выберем неподвижные оси координат  $Oxyz$  с началом в притягивающем центре  $O$ . Ось  $Ox$  проходит через начальное положение точки  $M$ , ось  $Oy$  лежит в одной плоскости с вектором начальной скорости, ось  $Oz$  образует с осями  $Ox$  и  $Oy$  правую тройку. Тогда дифференциальные уравнения движения примут вид

$$m\ddot{x} = -k^2 mx,$$

$$m\ddot{y} = -k^2 my,$$

$$m\ddot{z} = -k^2 mz.$$

В силу начальных данных

$$x(0) = l, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha, \quad \dot{z}(0) = 0$$

из третьего уравнения следует, что  $z \equiv 0$ , то есть точка при своем движении не выходит из плоскости  $Oxy$  и движется согласно двум первым уравнениям движения, общее решение которых имеет вид

$$x(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

$$y(t) = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt.$$

Определяя произвольные постоянные согласно начальным данным, получаем закон движения точки  $M$

$$x(t) = l \cos kt + \frac{v_0}{k} \cos \alpha \sin kt,$$

$$y(t) = \frac{v_0}{k} \sin \alpha \sin kt.$$

Исключая время  $t$ , находим уравнение траектории точки в виде

$$\left( \frac{x - y \operatorname{ctg} \alpha}{l} \right)^2 + \left( \frac{yk}{v_0 \sin \alpha} \right)^2 = 1.$$

**Пример 3.** Материальная точка массы  $m$  движется в плоскости  $Oxy$  под действием некоторой силы, причем траекторией точки оказывается ветвь гиперболы, уравнение которой имеет вид  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ ,  $y > 0$ . Ускорение точки все время остается параллельным оси  $Oy$ . В начальный момент времени точка находится на оси  $Oy$ , ее скорость равна  $v_0$ . Определить силу, действующую на точку, как функцию координат точки.

*Решение.* Для нахождения силы воспользуемся вторым законом Ньютона  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ , где  $\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y$  — ускорение точки в системе координат  $Oxy$ .

Поскольку ускорение точки все время остается параллельным оси  $Oy$ , проекция ускорения на ось  $Ox$  равна нулю, то есть  $\ddot{x} = 0$ . Отсюда следует, что  $\dot{x} = \text{const}$  во все время движения. Но в начальный момент времени скорость направлена вдоль оси  $Ox$ , поэтому  $\dot{x} = v_0$ . Записав уравнение траектории в виде

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = a^2 b^2$$

и дифференцируя его по времени, будем иметь

$$a^2 y \dot{y} - b^2 x \dot{x} = 0,$$

откуда  $\dot{y} = \frac{b^2 x v_0}{a^2 y}$ , причем  $y > 0$  из условия задачи. Дифференцируя уравнение траектории второй раз и подставляя выражение для  $\dot{y}$ , получаем соотношение для определения  $\ddot{y}$

$$\frac{b^4 x^2 v_0^2}{a^2 y^2} + a^2 y \ddot{y} - b^2 v_0^2 = 0,$$

откуда

$$\ddot{y} = \frac{b^4 v_0^2}{a^2 y^3} \left( \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \right) = \frac{b^4 v_0^2}{a^2 y^3}.$$

Таким образом, выражение для действующей силы имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{mb^4 v_0^2}{a^2 y^3} \mathbf{e}_y.$$

Эта сила направлена от оси  $Ox$  и обратно пропорциональна кубу расстояния от точки до оси  $Ox$ .

**Пример 4.** Материальная точка массы  $m$  описывает в плоскости  $Oxy$  параболу, заданную уравнением  $y^2 = 2px$ , под действием двух равных по величине сил, одна из которых направлена к фокусу параболы и обратно пропорциональна расстоянию точки от фокуса, другая — параллельна оси абсцисс и направлена в положительную сторону этой оси. Найти скорость точки.

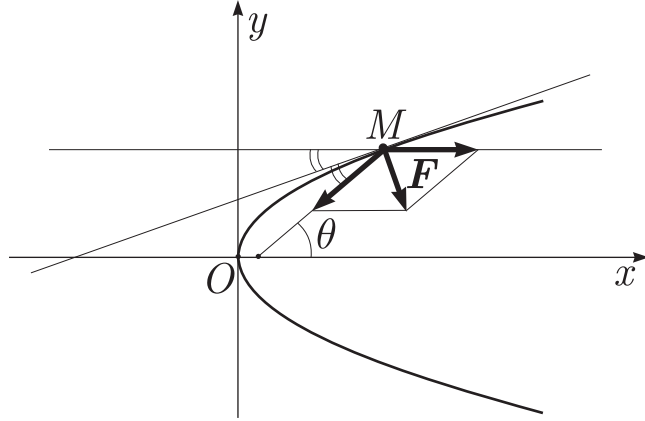
*Решение.* Найдем равнодействующую  $\mathbf{F}$  сил, действующих на материальную точку. Поскольку силы равны по величине, то равнодействующая  $\mathbf{F}$  сил — диагональ ромба сил, то есть направлена по биссектрисе угла, образованного векторами сил, и равна по величине

$$F = \frac{2mk}{r} \sin \frac{\theta}{2},$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности,  $r$  — фокальный радиус (полярный радиус), а  $\theta$  — истинная аномалия (полярный угол) определяется как функция  $r$  из фокального уравнения параболы

$$r = \frac{p}{1 - \cos \theta}.$$

Простой подсчет дает, что  $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{p}{2r}}$ , и значит,  $F = 2 \frac{mk}{r} \sqrt{\frac{p}{2r}}$ .



К примеру 4.

Так как касательная к параболе делит угол между фокальным радиус-вектором и прямой, параллельной оси параболы, пополам, то равнодействующая  $\mathbf{F}$  ортогональна касательной и уравнения движения точки в естественных осях принимают вид

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= 0, \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F. \end{aligned}$$

Таким образом, из первого уравнения системы следует, что скорость движения точки постоянна по величине.

Радиус кривизны траектории  $\rho$  как функцию  $r$  можно найти по формуле

$$\rho = \frac{((r')^2 + r^2)^{3/2}}{r^2 + 2(r')^2 - rr''},$$

где штрихом  $()'$  обозначена производная по переменной  $\theta$ . Для параболы будем иметь  $\rho = \frac{(\sqrt{2r})^3}{\sqrt{p}}$ . В результате уравнение движения в проекции на нормаль принимает вид

$$\frac{mv^2 \sqrt{p}}{(\sqrt{2r})^3} = 2 \frac{mk}{r} \sqrt{\frac{p}{2r}}.$$

Откуда следует, что  $v = 2\sqrt{k}$ .

**Пример 5.** Тяжелое колечко массы  $m$  надето на гладкую вертикально расположенную проволочную окружность радиуса  $r$ . В начальный момент оно находится в самой нижней точке окружности и ему сообщена начальная скорость  $v_0$ . Найти условия, при которых колечко совершит полный оборот по окружности и определить давление на нее колечка в самой верхней точке.

*Решение.* Колечко движется под действием силы тяжести — силы потенциальной, а связь (гладкая окружность) такова, что реакция связи  $\mathbf{N}$  перпендикулярна скорости колечка, поэтому из теоремы об изменении кинетической энергии

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = (mg, \mathbf{v}) + (\mathbf{N}, \mathbf{v}),$$

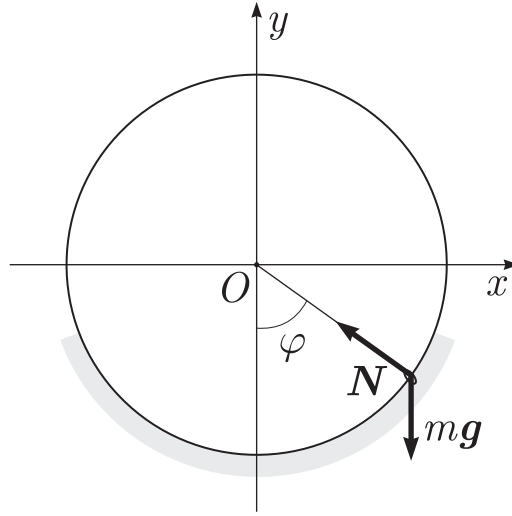
получаем закон сохранения энергии (первый интеграл теоремы об изменении кинетической энергии):

$$\frac{mv^2}{2} - mgr \cos \varphi = h,$$

где  $\varphi$  — угол, образованный радиус-вектором точки с вертикалью, направленной вниз,  $h$  — полный запас энергии. В силу начальных данных

$$h = \frac{mv_0^2}{2} - mgr.$$

В результате  $v^2(\varphi) = v_0^2 + gr(\cos \varphi - 1)$ .



К примеру 5.

Для того чтобы колечко совершило полный оборот по окружности, скорость в верхней точке окружности должна быть положительна, поскольку функция  $v^2(\varphi)$  убывает на промежутке  $[0, \pi]$ . Отсюда получаем условие для определения начальной скорости точки

$$v_0^2 - 2gr > 0 \quad \text{или} \quad v_0 > \sqrt{2gr}.$$

Давление  $\mathbf{P}$  колечка на окружность равно по величине реакции связи  $\mathbf{N}$  и противоположно  $\mathbf{N}$  по направлению:  $\mathbf{P} = -\mathbf{N}$ . Реакцию связи  $\mathbf{N}$  определим из уравнения движения в проекции на нормаль

$$\frac{mv^2}{r} = -mg \cos \varphi + N.$$

После подстановки  $v^2$  в уравнение движения получим выражение для реакции связи

$$N = \frac{mv_0^2}{r} + 2mg \cos \varphi - mg.$$

Здесь положительное значение реакция связи  $N$  принимает тогда, когда она направлена к центру окружности.

Таким образом, в верхней точке окружности реакция связи равна  $N(\pi) = \frac{mv_0^2}{r} - 3mg$ , а давление колечка на окружность —  $P = 3mg - \frac{mv_0^2}{r}$ .

**Пример 6.** По внешней стороне параболы, уравнение которой в системе координат  $Oxy$  имеет вид  $y^2 = 2x$ , причем ось симметрии параболы горизонтальна, скатывается без трения тяжелый шарик. В начальный момент шарик находится в точке с ординатой  $y_0 = 2$  и его начальная скорость равна нулю  $v_0 = 0$ . В какой точке шарик соскочит с параболы?

*Решение.* Действующая на шарик активная сила — сила тяжести является потенциальной силой, а так как шарик движется по связи (неподвижной параболе) без трения, то реакция связи  $\mathbf{N}$  перпендикулярна скорости шарика, следовательно, выполняется закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + mgy = h,$$

ось  $Oy$  — вертикаль, направленная вверх,  $h$  — полный запас энергии, в силу начальных данных равный  $2mg$ . Отсюда

$$v^2 = 2g(2 - y).$$

В момент отрыва шарика от параболы реакция связи  $\mathbf{N}$  обращается в нуль. Для определения момента отрыва воспользуемся естественными уравнениями движения. В проекции на нормаль будем иметь

$$\frac{mv^2}{\rho} = mg \cos \alpha - N,$$

где  $\alpha$  — угол наклона касательной к кривой, а  $\rho$  — радиус кривизны траектории. Тангенс угла наклона касательной равен  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$ , тогда

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Радиус кривизны найдем по формуле

$$\rho = \frac{(1 + (x'_y)^2)^{3/2}}{|x''_{yy}|} = (1 + y^2)^{3/2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение движения, будем иметь

$$\frac{mv^2}{(1 + y^2)^{3/2}} = mg \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} - N.$$

Отсюда, с учетом выражения для  $v^2$ , реакция связи равна

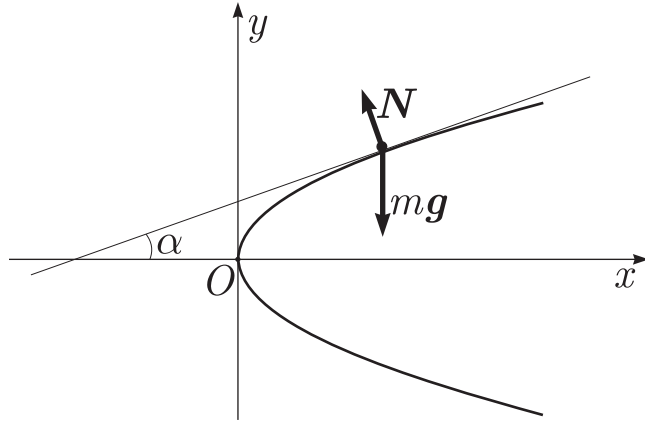
$$N = \frac{mg(y^3 + 3y - 4)}{(1 + y^2)^{3/2}}$$

Поскольку в момент отрыва  $N = 0$ , то уравнение для определения ординаты точки отрыва имеет вид

$$y^3 + 3y - 4 = 0.$$

Нетрудно видеть, что единственным действительным корнем этого уравнения является значение  $y = 1$  и при  $y < 1$  выражение для  $N$  принимает отрицательные значения. Таким образом, шарик отрывается от параболы в точке  $(1/2; 1)$ .





К примеру 6.

**Пример 7.** По лемнискате, расположенной в вертикальной плоскости  $Oxy$  ( $Ox$  — вертикаль, направленная вниз) в полярной системе координат заданной уравнением  $r^2 = 2a^2 \sin 2\varphi$ , скользит без трения тяжелая материальная точка массы  $m$ , выходя из точки  $O$  без начальной скорости. Найти время движения по кривой в зависимости от угла  $\varphi$ .

*Решение.* Поскольку заданная сила (сила тяжести) потенциальна, и связь такова, что реакция связи перпендикулярна скорости движения точки, то выполняется закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} - mgx = h,$$

где  $h$  — полный запас энергии, в силу начальных данных  $x(0) = 0$ ,  $v(0) = 0$  равный нулю  $h = 0$ . Отсюда получаем соотношение скорости и положения точки

$$v^2 = 2gx = 2gr \cos \varphi \quad \text{или} \quad v^2 = 2g \cos \varphi \sqrt{2a^2 \sin 2\varphi}.$$

Найдем выражение для квадрата скорости с учетом уравнения траектории:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{2a^2 \cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi} + 2a^2 \sin 2\varphi\right) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2a^2}{\sin 2\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Приравнявая выражения для  $v^2$ , получаем дифференциальную связь времени  $t$  с положением — углом  $\varphi$ :

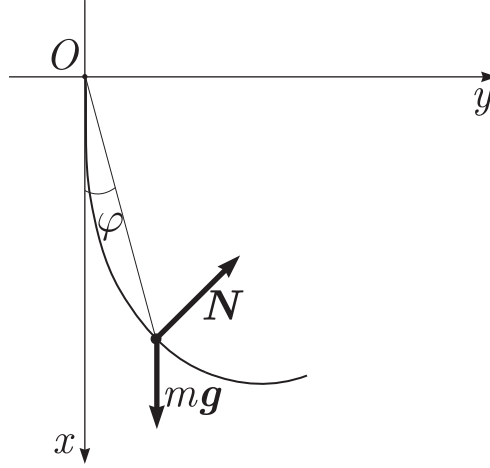
$$\frac{2a^2}{\sin 2\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g \cos \varphi \sqrt{2a^2 \sin 2\varphi}.$$

Движение точки по кривой происходит при увеличении угла  $\varphi$  ( $\frac{d\varphi}{dt} \geq 0$ ). После разделения переменных, дифференциальное уравнение принимает вид

$$dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{g}} \sqrt{\frac{1}{\sin^3 \varphi \cos^5 \varphi}} d\varphi \quad \text{или} \quad dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{g}} \operatorname{tg}^{-\frac{3}{4}} \varphi d(\operatorname{tg} \varphi).$$

Отсюда

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^\varphi \operatorname{tg}^{-\frac{3}{4}} \varphi d(\operatorname{tg} \varphi) = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \sqrt[4]{\operatorname{tg} \varphi}.$$



К примеру 7.

**Пример 8.** Тяжелая материальная точка массы  $m$  движется по внутренней поверхности гладкого прямого кругового конуса, вершина которого обращена вниз, а ось симметрии вертикальна. Угол при вершине равен  $2\alpha$ . В начальный момент расстояние точки от вершины конуса равно  $a$ , начальная скорость направлена перпендикулярно к образующей конуса и по величине равна  $v_0$ . Определить траекторию точки и давление, которое она оказывает на поверхность конуса.

*Решение.* Будем определять положение точки сферическими координатами с началом в вершине конуса. Так как точка обязана оставаться на поверхности указанного конуса — ее широта (угол  $\theta$ ) будет оставаться постоянной и равна  $\alpha$ . В результате положение точки на поверхности конуса определяется двумя координатами: расстоянием  $r$  до вершины конуса и долготой — углом  $\varphi$ , который образует вертикальная плоскость, проходящая через точку и ось конуса с какой-либо неподвижной вертикальной плоскостью, проходящей через ось конуса.

Поскольку реакция связи  $\mathbf{N}$  ортогональна поверхности конуса, а заданная сила — сила тяжести потенциальна, то выполняется закон сохранения энергии

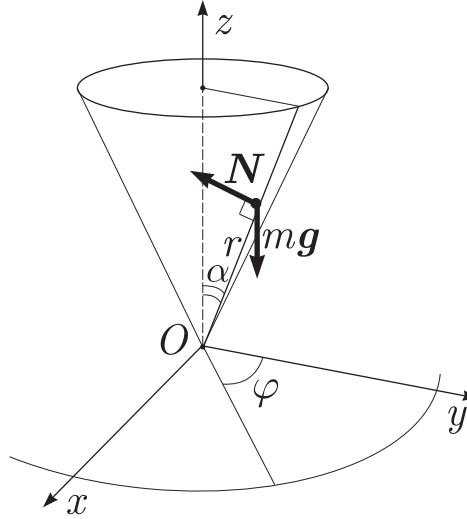
$$\frac{mv^2}{2} + mgr \cos \alpha = \frac{mv_0^2}{2} + mga \cos \alpha,$$

где  $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha$ .

Так как ни сила тяжести, ни реакция связи не дают момента относительно оси конуса, выполняется закон площадей в горизонтальной плоскости (проекция кинетического момента точки на ось конуса сохраняется), то есть

$$mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \alpha = mav_0 \sin \alpha.$$

Отсюда  $\dot{\varphi} = \frac{v_0 a}{r^2 \sin \alpha}$ .



К примеру 8.

Для получения уравнения траектории (связи  $r$  и  $\varphi$ ) исключим из интеграла энергии время, используя найденное из интеграла площадей выражение для  $\dot{\varphi}$ . Выражение для квадрата скорости  $v^2$  принимает вид

$$v^2 = \left( \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} \right)^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 = \frac{v_0^2 a^2}{r^4 \sin^2 \alpha} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{v_0^2 a^2}{r^2}.$$

Подставляя выражение для  $v^2$  в интеграл энергии и выделяя слагаемое с производной  $\frac{dr}{d\varphi}$ , получаем

$$\frac{v_0^2 a^2}{r^4 \sin^2 \alpha} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = v_0^2 \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + 2g \cos \alpha (a - r).$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим неявное уравнение траектории

$$\frac{\sin \alpha}{v_0 a} \varphi = \int_a^r \frac{dr}{r \sqrt{v_0^2 (r^2 - a^2) + 2gr^2 \cos \alpha (a - r)}}.$$

Давление точки на поверхность конуса равно по величине и противоположно по направлению реакции связи  $\mathbf{N}$ , которая может быть найдена из уравнения, полученного проектированием на нормаль к поверхности конуса векторного уравнения движения

$$m \mathbf{a}_{\text{абс}} = m \mathbf{g} + \mathbf{N}.$$

Для определения  $\mathbf{N}$  необходимо найти проекцию абсолютного ускорения точки на нормаль к конусу. Для этого можно, введя подвижную систему отсчета, связанную с вертикальной плоскостью, проходящей через точку и ось конуса, использовать теорему Кориолиса

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{кор}}.$$

Поскольку нормаль к поверхности конуса лежит в указанной вертикальной плоскости и перпендикулярна образующей, достаточно найти проекцию  $\mathbf{a}_{\text{абс}}$  на этот перпендикуляр. Так как относительное движение — прямолинейное движение по образующей конуса, проекция относительного ускорения  $\mathbf{a}_{\text{отн}}$  на нормаль

равна нулю. Подвижная система отчета вращается вокруг оси конуса ( $Oz$ ) с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_z$ , поэтому переносное ускорение  $\mathbf{a}_{\text{пер}}$  складывается из вращательного и осеостремительного. Вращательное ускорение  $\mathbf{a}_{\text{пер}}^{\text{вр}} = [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}]$  ортогонально вертикальной плоскости, осеостремительное ускорение  $\mathbf{a}_{\text{пер}}^{\text{ос}} = [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]]$  направлено к оси конуса и равно по величине  $r\dot{\varphi}^2 \sin \alpha$ . Кориолисово ускорение  $\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}]$  ортогонально указанной плоскости, следовательно, его проекция на нормаль равна нулю.

Таким образом, проекция уравнения движения на нормаль имеет вид

$$mr\dot{\varphi}^2 \sin \alpha \cos \alpha = -mg \sin \alpha + N$$

Откуда, используя интеграл площадей, получаем

$$N = m \sin \alpha \left( g + \frac{v_0^2 a^2 \cos \alpha}{r^3 \sin^2 \alpha} \right).$$

**Пример 9.** Бусинка массы  $m$  может скользить без трения по прямолинейному стержню, вращающемуся в неподвижной вертикальной плоскости вокруг своего конца  $O$  с постоянной угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ . Бусинка прикреплена к точке  $O$  пружиной жесткости  $c$  ( $c > m\omega^2$ ), натуральная длина пружины равна  $l$ . Найти закон движения бусинки по стержню, если в начальный момент стержень горизонтален, пружина не растянута и скорость бусинки относительно стержня равна нулю.

*Решение.* Введем подвижную систему отсчета  $Oxyz$ , связанную со стержнем: ось  $Ox$  направлена вдоль стержня, ось  $Oy$  лежит в вертикальной плоскости, в которой движется стержень, ось  $Oz$  образует с осями  $Ox$  и  $Oy$  правую тройку. Система отсчета  $Oxyz$  вращается вокруг горизонтальной оси  $Oz$  с постоянной угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ .

Поскольку требуется найти закон движения бусинки относительно неинерциальной системы отсчета (относительно стержня), используем основное уравнение относительного движения

$$m\mathbf{a}_{\text{отн}} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{упр}} + \mathbf{N} + (-m\mathbf{a}_{\text{пер}}) + (-m\mathbf{a}_{\text{кор}})$$

где  $\mathbf{N}$  — реакция стержня, направленная перпендикулярно стержню (бусинка скользит по стержню без трения). Относительно подвижной системы отсчета бусинка движется прямолинейно по оси  $Ox$ , поэтому  $\mathbf{a}_{\text{отн}} = \ddot{x}\mathbf{e}_x$ . Переносное ускорение бусинки равно  $\mathbf{a}_{\text{пер}} = [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times x\mathbf{e}_x]] = -\omega^2 x\mathbf{e}_x$ , кориолисово ускорение —  $\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}] = 2\omega \dot{x}\mathbf{e}_y$ . В результате проекция уравнения относительного движения на ось  $Ox$  имеет вид

$$m\ddot{x} = -mg \sin \omega t - c(x - l) + m\omega^2 x$$

или

$$\ddot{x} + \left( \frac{c}{m} - \omega^2 \right) x = \frac{c}{m} l - g \sin \omega t$$

Решая линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, получаем общее решение

$$x = C_1 \sin \nu t + C_2 \cos \nu t + \frac{g}{\omega^2 - \nu^2} \sin \omega t + \frac{c}{m\nu^2} l; \quad \nu^2 = \frac{c}{m} - \omega^2$$

Находя произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  в силу начальных данных  $x(0) = l$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , получаем закон относительного движения бусинки

$$x = \frac{l}{\nu^2} \left( \frac{c}{m} - \omega^2 \cos \nu t \right) + \frac{g}{\omega^2 - \nu^2} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\nu} \sin \nu t \right)$$

**Пример 10.** Материальная точка массы  $m$  движется прямолинейно вдоль оси  $Ox$  под действием силы  $F = (-x^3 - x^2 + 2x)e_x$ . Начертить фазовый портрет системы.

*Решение.* Уравнение движения точки имеет вид

$$m\ddot{x} = -x^3 - x^2 + 2x.$$

Умножив обе части уравнения на  $\dot{x}$ , получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right)$$

или первый интеграл уравнения движения

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = h,$$

где  $V(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$  — потенциальная энергия,  $h$  — полная энергия. Заметим, что данный первый интеграл можно было написать, применив теорему об изменении кинетической энергии (так как заданная сила потенциальна, то имеет место закон сохранения энергии).

На любой фазовой кривой значение полной энергии  $h$  постоянно, следовательно, каждая фазовая кривая лежит на соответствующей линии уровня энергии  $h$ . Таким образом, для построения фазового портрета необходимо построить множество линий уровня энергии, задаваемых интегралом энергии.

Для построения фазового портрета воспользуемся графиком потенциальной энергии  $V(x)$ . Критическим точкам потенциальной энергии соответствуют положения равновесия на фазовой плоскости, при этом, если критическая точка является точкой невырожденного максимума потенциальной энергии, то ей соответствует положение равновесия типа "седло", а если критическая точка — точка невырожденного минимума, то положение равновесия — равновесие типа "центр". Записав уравнение для нахождения критических точек потенциальной энергии  $V'(x) = -F(x) = 0$ , в нашем случае, будем иметь

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \quad \text{или} \quad x = -2, x = 0, x = 1,$$

причем критические точки  $x = -2$  и  $x = 1$  являются точками минимума потенциальной энергии, а  $x = 0$  — точкой максимума.

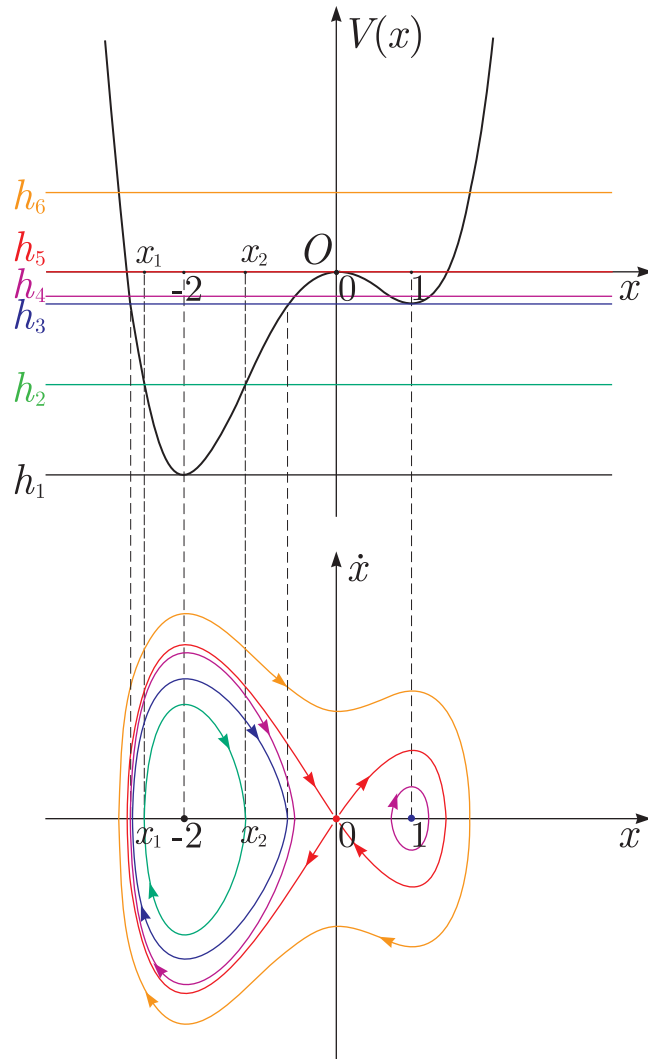
Линии уровня энергии  $h$  симметричны относительно оси  $Ox$  фазовой плоскости  $Ox\dot{x}$  и в точках оси  $Ox$ , отличных от положений равновесия, ортогональны этой оси. Как видно из формулы

$$\dot{x}_{\pm}(x, h) = \pm \sqrt{\frac{2(h - V(x))}{m}},$$

при фиксированном значении энергии  $h$  движение точки возможно в области, заданной неравенством  $V(x) \leq h$ . При фиксированном  $h$  на промежутках из области возможности движения, где функция  $V(x)$  возрастает, в области  $\dot{x} \geq 0$  фазовой плоскости функция  $\dot{x}_+(x, h)$  на соответствующих промежутках убывает, и наоборот, на промежутках, где функция  $V(x)$  убывает, функция  $\dot{x}_+(x, h)$  — возрастает.

Так (смотри рисунок к примеру 10), для значений полной энергии  $h < V(-2)$  движение невозможно. Для уровня энергии  $h_1 = V(-2)$  областью возможности движения является точка  $x = -2$ , а фазовой кривой — положение равновесия типа "центр"  $x = -2, \dot{x} = 0$ . Для уровня энергии  $h_2$  областью возможности движения является отрезок  $[x_1, x_2]$ , функция  $\dot{x}_+(x, h_2)$  возрастает на отрезке  $[x_1, -2]$  и убывает на отрезке  $[-2, x_2]$ .

Изменяя значение полной энергии  $h$ , аналогично получаем кривые соответствующего уровня энергии. Отметим, что на кривой уровня энергии  $h_5 = 0$  лежит три фазовые кривые, одна из которых положение равновесия типа "седло"  $x = 0, \dot{x} = 0$ , а две другие фазовые траектории называются сепаратрисами.



К примеру 10.

## Указания к задачам главы 2 "Динамика точки"

### сборника "Задачи по теоретической механике"

- 2.1.** Выписать уравнение прямолинейного движения по вертикали, имея в виду, что когда точка находится на поверхности Земли её ускорение равно ускорению свободного падения  $g$ . Понизив порядок уравнения движения, получить связь скорости точки с её положением.
- 2.2.** Последовательно проинтегрировать уравнение прямолинейного движения.
- 2.3.** Необходимым условием достижения снарядом самолета является пересечение параболы, по которой движется снаряд, и прямой, по которой движется самолет.
- 2.4.** По максимальной дальности полета снаряда определить величину его начальной скорости  $v_0$ . Затем решить задачу о движении снаряда при заданной начальной скорости  $v_0$  и угле бросания  $\frac{\pi}{6}$ .
- 2.5.** Воспользоваться уравнениями траекторий снарядов (парабол)  $y = y_i(x, \alpha_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Из условия пересечения траекторий найти точку на поверхности Земли, в которую попадают оба снаряда.
- 2.6.** Параметрические уравнения геометрического места фокусов парабол, как функций угла бросания, определяются выражениями для координат фокусов.
- 2.7.** Найти высоты подъема снарядов над горизонтом за одно и то же время. Выписать условие возможности перелета снарядом, брошенным под углом, расстояния  $l$  по горизонтали.
- 2.8.** Координаты точки  $(x_1, y_1)$  удовлетворяют уравнению параболы  $y = y(x, v_0, \alpha)$ , а тангенс угла наклона касательной в этой точке равен  $y'_x = y'_x(x_1, v_0, \alpha)$ . Эти два условия определяют связь начальной скорости  $v_0$  и угла ее наклона  $\alpha$  с  $\beta, x_1, y_1$ .
- 2.9.** Найти максимальную высоту подъема, проинтегрировав уравнения движения точки вверх и получив зависимость скорости точки от высоты подъема. Затем аналогично проинтегрировав уравнения движения точки вниз, получить значение скорости при падении.
- 2.10.** Условие встречи тел — равенство координат, которые являются решениями дифференциальных уравнений движения. Записав дифференциальные уравнения движения вверх и вниз, получить дифференциальное уравнение для нахождения расстояния между телами (разности координат тел).
- 2.11.** Найти точку пересечения траектории пули с вертикалью, на которой находится цель.
- 2.12.** Закон движения  $x = x(t, v_0, \alpha)$ ;  $y = y(t, v_0, \alpha)$  при фиксированном времени задает параметрические по  $\alpha$  уравнения кривой. Исключение  $\alpha$  дает искомым ответ.
- 2.13.** Проанализировать решение уравнений движения, выписанных в проекции на вертикаль и горизонталь.
- 2.14.** Условие прохождения камня через верхнюю точку забора определяет связь величины начальной скорости  $v_0$  с начальным углом наклона  $\alpha$ :  $v_0 = v_0(\alpha)$ . Далее решить задачу об экстремуме функции.
- 2.15.** Решить задачу о точке, брошенной под углом к горизонту, в поле силы тяжести.
- 2.16.** Выписать дифференциальные уравнения движения шарика в проекциях на оси  $Ox$  и  $Oy$ .

**2.17.** См. **2.16.**

**2.18.** Выписать дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси с началом в начальном положении точки и направленными вдоль векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{v}_0$  и  $[\mathbf{E} \times \mathbf{v}_0]$ .

**2.19.** Выписать дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси с началом в начальном положении точки и направленными вдоль векторов  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{v}_0$  и  $[\mathbf{H} \times \mathbf{v}_0]$ .

**2.20.** См. **2.18.**

**2.21.** Воспользоваться формулами Бине, представив уравнение траектории точки (окружности) в полярных координатах с полюсом в точке  $A$  и полярной осью, направленной по диаметру окружности, проходящему через точку  $A$ .

**2.22.** Выразить скорость точки через  $r$  и  $\frac{dr}{d\varphi}$ , исходя из закона площадей.

**2.23.** Выписать дифференциальные уравнения движения в проекции на оси  $Ox$  и  $Oy$ .

**2.24.** Воспользоваться законом сохранения энергии и выразить константу интегрирования через большую полуось эллипса.

**2.25.** Выразив большую полуось эллипса из условия задачи, воспользоваться результатом задачи **2.24.** и свойством касательной к эллипсу.

**2.26.** Воспользоваться интегралом кинетического момента (законом площадей).

**2.27.** Воспользоваться интегралом кинетического момента, уравнением связи и уравнением движения точки в проекции на радиус.

**2.28.** Выписать дифференциальное уравнение движения в проекции на проволоку и решить задачу Коши.

**2.29.** Воспользоваться законом сохранения энергии и уравнением движения в проекции на главную нормаль к траектории.

**2.30.** См. **2.29.** Использовать условия неотрыва от связи.

**2.31.** Воспользоваться законом сохранения энергии и условием постоянства проекции скорости на вертикаль.

**2.32.** Использовать закон сохранения энергии и уравнение траектории.

**2.33.** См. **2.32.**

**2.34.** Использовать закон сохранения энергии и условия прохождения гири через точку  $D$ .

**2.35.** Движение саней от точки  $C$  в точку  $D$  — движение свободной точки, брошенной под углом  $\alpha$  к горизонту, в поле силы тяжести.

**2.36.** Воспользоваться законом сохранения энергии и уравнением движения точки в проекции на главную нормаль к траектории.

**2.37.** Выписать в цилиндрических координатах закон площадей в горизонтальной плоскости и уравнение движения в проекции на радиус.

**2.38.** Воспользоваться законом сохранения энергии и уравнением движения точки в проекции на радиус.



- 2.39.** Воспользоваться законом сохранения энергии, уравнением движения точки в проекции на радиус сферы, представив проекцию ускорения через скорость точки.
- 2.40.** Использовать интегралы площадей в проекции на плоскость  $Oxy$  и энергии в цилиндрических координатах.
- 2.41.** См. **2.40.** Выписать уравнение движения точки в проекции на нормаль к конусу.
- 2.42.** Выписать дифференциальные уравнения относительного движения точки в проекции на направление  $\overrightarrow{OM}$  и на горизонталь, ортогональную  $\overrightarrow{OM}$ .
- 2.43.** Воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии для относительного движения.
- 2.44.** См. **2.42.**
- 2.45.** См. **2.42.**
- 2.46.** См. **2.42.**
- 2.47.** Спроектировать уравнение относительного движения на направление вдоль трубки и на перпендикуляр к ней, лежащий в горизонтальной плоскости. Воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии для относительного движения.
- 2.48.** Спроектировать уравнение относительного движения на касательную и нормаль к трубке в горизонтальной плоскости. Воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии для относительного движения.
- 2.49.** Выписать уравнения относительного движения точки в проекции на касательную и нормаль к относительной траектории точки в горизонтальной плоскости на широте  $\varphi$ .
- 2.50.** Спроектировать уравнение относительного движения точки на направления  $Ox$ ,  $Oz$  и перпендикуляр к плоскости  $Oxz$  ( $Oy$ ).
- 2.51.** Выписать дифференциальные уравнения относительного движения в проекциях на направления  $Ox$  и  $Oy$ .
- 2.52.** Выписать уравнения относительного движения в проекциях на касательную и главную нормаль к относительной траектории.
- 2.53.** Выписать дифференциальное уравнение относительного движения вдоль трубки.
- 2.54.** Выписать уравнения относительного равновесия и относительного движения в проекции на касательную к относительной траектории. Для нахождения периода малых колебаний в уравнении движения удерживать только линейные члены по отношению к отклонению  $\varphi$  от положения относительного равновесия.
- 2.55.** См. **2.53.**
- 2.56.** Спроектировать уравнение относительного движения на касательную к трубке.
- 2.57.** Воспользоваться определением силы тяжести.
- 2.58.** Выписать уравнения относительного движения в проекции на оси  $Ox$  и  $Oy$ , расположенные в гори-

горизонтальной плоскости в данном месте на широте  $\theta$ . Из интеграла площадей находится угловая скорость вращения вертикальной плоскости качения маятника.

**2.59.** Воспользоваться интегралом энергии и графиком потенциальной энергии равнодействующей сил.

**2.60.** Воспользоваться интегралом энергии.

**2.61.** Положение математического маятника задать углом  $\varphi$  между радиус-вектором точки и вертикалью, направленной вниз. Воспользоваться интегралом энергии и графиком потенциальной энергии силы тяжести как функции угла  $\varphi$ .

**2.62.** См. **2.59**.

**2.63.** Разложить потенциальную энергию в ряд в окрестности точки максимума, выписать интеграл энергии, считая постоянную интеграла равной значению потенциальной энергии в точке максимума.

**2.64.** Воспользоваться интегралом энергии для нахождения времени движения по фазовой кривой и формулой для нахождения площади фигуры, ограниченной графиком некоторой функции.

**2.65.** Разложив потенциальную энергию в ряд в окрестности точки минимума, выписать линейное приближение уравнения движения точки.

**2.66.** Воспользоваться интегралом энергии, считая постоянную интеграла равной значению потенциальной энергии в точке  $\varphi = \pi$ .

**2.67.** Воспользоваться интегралом энергии.

**2.68.** Выписать дифференциальные уравнения движения точки.

**2.69.** Применить теорему об изменении кинетической энергии в неинерциальной системе отсчета.