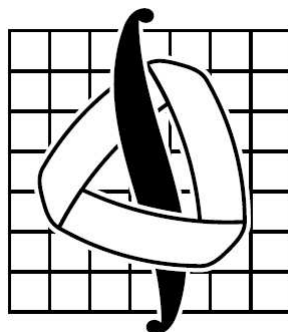


**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**имени М.В. ЛОМОНОСОВА**  
**Механико-математический факультет**  
**Кафедра теоретической механики и мехатроники**



К.Е. Якимова, Т.В. Попова

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
к сборнику ”Задачи по теоретической механике”

**КИНЕМАТИКА**

Москва 2007

**Пример 1.** Точка описывает плоскую траекторию. Зная радиус кривизны этой траектории и скорость изменения угла, образуемого вектором скорости с некоторой неподвижной прямой, определите величину скорости точки.

*Решение.* Аналитическое решение задачи следует непосредственно из определения радиуса кривизны траектории  $\rho = \frac{ds}{d\varphi}$ . Получаем

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\varphi} \dot{\varphi} = \rho \dot{\varphi}$$

**Пример 2.** Точка движется по винтовой линии с постоянной по величине скоростью  $v_0$ . Определить величину и направление ускорения и радиус кривизны траектории точки.

*Решение.* Параметрические уравнения винтовой линии в декартовой системе координат имеют вид

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = b\varphi$$

где  $\varphi$  — функция времени,  $r$  и  $b$  — постоянные.

Дифференцируя эти выражения по времени, получим

$$\dot{x} = -r \sin \varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = r \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{z} = b \dot{\varphi}$$

откуда

$$v^2 = (r^2 + b^2) \dot{\varphi}^2 = v_0^2 = \text{const}, \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{v_0^2}{r^2 + b^2}$$

Поскольку  $\ddot{\varphi} = 0$ , проекции ускорения в декартовой системе координат имеют вид

$$\ddot{x} = -r \cos \varphi \dot{\varphi}^2, \quad \ddot{y} = -r \sin \varphi \dot{\varphi}^2, \quad \ddot{z} = 0$$

Из последних формул видно, что вектор ускорения расположен в плоскости, ортогональной к оси  $z$ , а величина ускорения равна

$$a = r \dot{\varphi}^2 = \frac{rv_0^2}{r^2 + b^2}$$

Так как точка движется с постоянной по величине скоростью, то касательная составляющая ускорения обращается в нуль, то есть  $a_\tau = 0$ . Следовательно,

$$a = a_\nu = \frac{v^2}{\rho}$$

откуда

$$\rho = \frac{r^2 + b^2}{r}$$

**Пример 3.** Точка движется в плоскости. Пользуясь формулами для компонент ускорения точки в полярных координатах, доказать, что если ускорение точки равно нулю, то она будет совершать равномерное и прямолинейное движение.

*Решение.* Используя выражения для компонент ускорения в полярных координатах, в силу условия задачи имеем

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0,$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0$$

Отсюда следует, что  $r^2\dot{\varphi} = c = \text{const}$ , то есть

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}$$

Далее,

$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 = \frac{c^2}{r^3}, \quad \Rightarrow \quad \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr} = \frac{c^2}{r^3}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\dot{r}^2 = -\frac{c^2}{r^2} + k^2$$

где  $k$  — произвольная постоянная. Тогда квадрат скорости точки равен

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = -\frac{c^2}{r^2} + k^2 + \frac{c^2}{r^2} = k^2$$

то есть скорость точки постоянна по величине.

Найдем траекторию движения точки. Имеем

$$\dot{r} = \pm \sqrt{k^2 - \frac{c^2}{r^2}}, \quad \dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}$$

Если  $k = 0$ , то скорость точки равна нулю, следовательно, точка покоится. Если  $k \neq 0$ ,  $c = 0$ , то  $\varphi = \text{const}$ , следовательно, точка движется равномерно и прямолинейно. Если  $k \neq 0$ ,  $c \neq 0$ , имеем

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{r^2 \sqrt{k^2 - \frac{c^2}{r^2}}}{c}$$

откуда, интегрируя, получим

$$r = \frac{c}{k \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Последнее уравнение является уравнением прямой в полярных координатах.

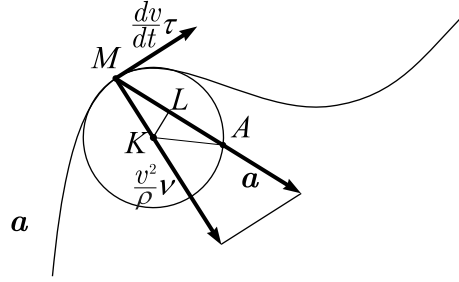
**Пример 4.** Точка  $M$  описывает плоскую кривую. Линия ускорения точки в пересечении с кругом кривизны образует хорду  $MA = l$ . Выразить величину ускорения через величину скорости и длину этой хорды.

*Решение.* Из представления ускорения точки в осях естественного трехгранника следует

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \boldsymbol{\nu}$$

то есть  $\mathbf{a}$  — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами величины  $\frac{dv}{dt}$  и  $\frac{v^2}{\rho}$ . Из чертежа ясно, что этот треугольник подобен треугольнику  $\triangle MKL$ , где  $K$  — центр кривизны кривой, а  $L$  — середина хорды  $MA$ . Из подобия треугольников получаем

$$\frac{a}{v^2/\rho} = \frac{\rho}{l/2}, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2v^2}{l}$$

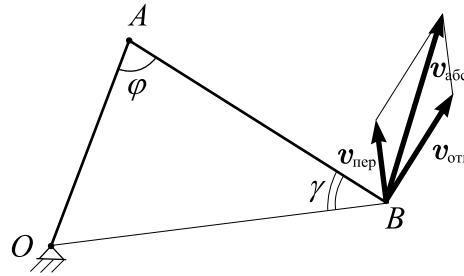


К примеру 4.

**Пример 5.** Стержень  $OA$  длины  $l_1$  вращается в плоскости чертежа вокруг неподвижной точки  $O$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$  против часовой стрелки. Вокруг его подвижного конца  $A$  в той же плоскости вращается другой стержень  $AB$  длины  $l_2$  так, что угол  $\varphi$ , образованный стержнями, изменяется по закону  $\dot{\varphi} = \omega_2 > 0$ , где  $\omega_2$  постоянна по величине. Определить абсолютную скорость точки  $B$ , применяя теорему сложения скоростей.

*Решение.* Выберем сначала подвижную систему отсчета связанной со стержнем  $OA$ : одну из осей направим по стержню  $OA$ , а вторую — ортогонально  $OA$  в плоскости чертежа. Тогда переносная скорость точки  $B$  будет равна  $v_{\text{пер}} = [\omega_1 \times \overrightarrow{OB}]$ . Относительное положение стержня  $AB$  определяется углом  $\varphi$ , а относительная скорость точки  $B$  имеет вид  $v_{\text{отн}} = [\omega_2 \times \overrightarrow{AB}]$ . По теореме сложения скоростей  $v_{\text{абс}} = v_{\text{пер}} + v_{\text{отн}}$ , то есть скорость точки  $B$  является диагональю параллелограмма, построенного на векторах  $v_{\text{пер}}$  и  $v_{\text{отн}}$ , следовательно,

$$\begin{aligned} v_{\text{абс}}^2 &= v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{отн}}^2 + 2v_{\text{пер}}v_{\text{отн}} \cos \gamma = \\ &= \omega_1^2(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \varphi) + \omega_2^2l_2^2 + 2\omega_1\omega_2l_2(l_2 - l_1 \cos \varphi) \end{aligned}$$

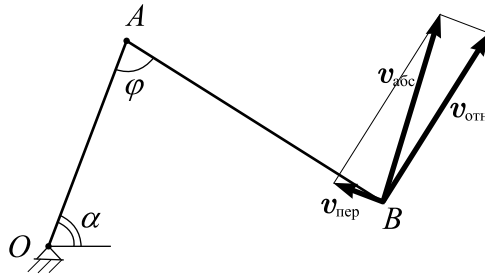


К примеру 5.

Если за подвижную систему отсчета выбирается система осей с началом в точке  $A$  и движущаяся поступательно, переносная скорость точки  $B$  будет равна  $v_{\text{пер}} = [\omega_1 \times \overrightarrow{OA}]$ . Положение стержня  $AB$  относительно подвижных осей определяется теперь углом  $\alpha + \varphi$ , скорость изменения которого  $\omega_1 + \omega_2$ . Благодаря этому вектор относительной скорости равен  $v_{\text{отн}} = [(\omega_1 + \omega_2) \times \overrightarrow{AB}]$ . По теореме сложения скоростей

$$v_{\text{абс}} = v_{\text{пер}} + v_{\text{отн}} = [\omega_1 \times (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB})] + [\omega_2 \times \overrightarrow{AB}] = [\omega_1 \times \overrightarrow{OB}] + [\omega_2 \times \overrightarrow{AB}]$$

Таким образом, выражение для абсолютной скорости точки  $B$  совпадает с предыдущим, что и естественно.



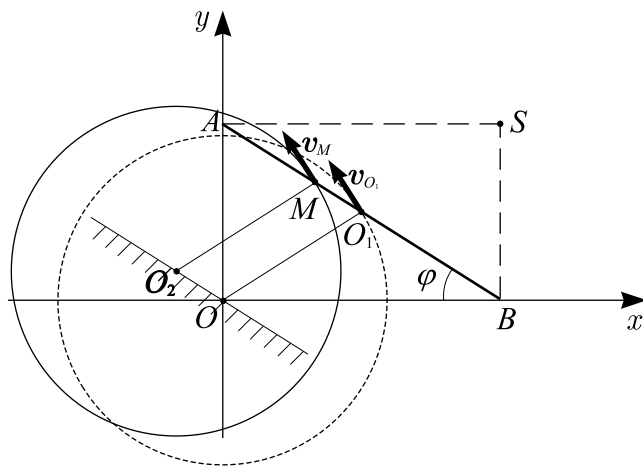
К примеру 5.

**Пример 6.** Прямолинейный стержень  $AB$  длины  $l$  скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным направляющим  $Ox$  и  $Oy$ , вращающимся вокруг точки  $O$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$  против часовой стрелки. Угол наклона стержня  $AB$  к оси  $Ox$  изменяется по закону

$$\varphi = \varphi_0 \pm \omega t.$$

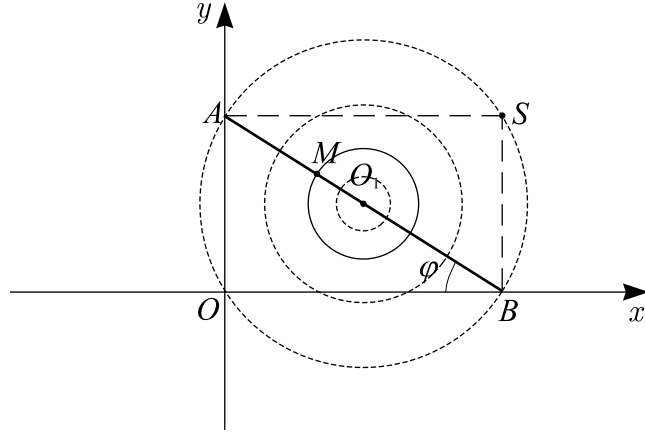
Определить абсолютную траекторию точки  $M$  стержня.

**Решение.** Пусть угол  $\varphi$  меняется по закону  $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ . Свяжем подвижную систему отсчета с направляющими. Тогда стержень будет участвовать в двух движениях: вместе с подвижной системой он вращается с угловой скоростью  $\omega$  против часовой стрелки вокруг точки  $O$  и относительно подвижной системы отсчета вращается с такой же угловой скоростью по часовой стрелке, имея мгновенный центр вращения в точке  $S$ , расположенной на пересечении перпендикуляров к осям  $Ox$  и  $Oy$ , восстановленных из концов стержня  $AB$ . Результирующее движение в этом случае представляется парой вращений, эквивалентной мгновенно-поступательному движению твердого тела, скорость которого равна моменту пары  $\omega l$ . Во все время движения скорость центра стержня  $O_1$  остается постоянной по величине и направлена ортогонально к прямой  $OS$ , расстояние между неподвижной точкой  $O$  и точкой  $O_1$  равно  $l/2$ , следовательно, центр стержня движется по окружности с центром в точке  $O$  радиуса  $l/2$  с постоянной скоростью. Так как движение стержня поступательное, любая другая точка стержня будет двигаться по окружности радиуса  $l/2$ , центр которой лежит на прямой, проходящей через точку  $O$  и параллельной  $AB$ , со скоростью  $\omega l$ .



К примеру 6.

Рассмотрим второй случай, когда  $\varphi = \varphi_0 - \omega t$ . Угол  $\varphi$  убывает со скоростью  $\omega$ , и стержень совершает два вращения, происходящие против часовой стрелки. Результирующее движение является мгновенным вращением с угловой скоростью  $2\omega$ , причем линия действия вектора мгновенной угловой скорости проходит через центр стержня  $O_1$ . Поэтому скорость точки  $O_1$  будет постоянно оставаться равной нулю, а все остальные точки стержня будут описывать концентрические окружности вокруг точки  $O_1$ .



К примеру 6.

**Пример 7.** По неподвижному круговому конусу с углом при вершине, равным  $2\alpha$ , катится без скольжения другой круговой конус с углом при вершине, равным  $2\beta$ , высоты  $h$  так, что центр основания подвижного конуса движется с постоянной по величине скоростью  $v_0$ . Найти мгновенную угловую скорость подвижного конуса, а также ускорения точки  $C$  касания основания подвижного конуса с неподвижным и точки  $D$  подвижного конуса диаметрально противоположной  $C$ .

*Решение.* Подвижный конус катится по неподвижному без проскальзывания, следовательно, точки подвижного конуса, расположенные на общей образующей, имеют нулевые скорости. Поэтому мгновенная ось вращения совпадает с общей образующей обоих конусов. Введем подвижную систему отсчета связанную с плоскостью, проходящей через оси симметрии конусов. Движение подвижного конуса теперь можно представить как сложное, состоящее из вращения подвижной системы вокруг оси симметрии неподвижного конуса с угловой скоростью равной  $\omega_1 = \frac{v_0}{h \sin(\alpha + \beta)}$  и направленной по оси симметрии неподвижного конуса и относительного вращения подвижного конуса вокруг своей оси симметрии в подвижной системе отсчета. Зная направления абсолютной и относительной угловых скоростей подвижного конуса, а также величину и направление переносной угловой скорости, легко определить величину абсолютной угловой скорости вращения конуса. Согласно теореме сложения угловых скоростей  $\omega_{abc} = \omega_{пер} + \omega_{отн}$  будем иметь

$$\frac{\omega_{abc}}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\omega_1}{\sin \beta}$$

откуда

$$\omega_{abc} = \omega = \omega_1 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} = \frac{v_0}{h \sin \beta} = \text{const}$$

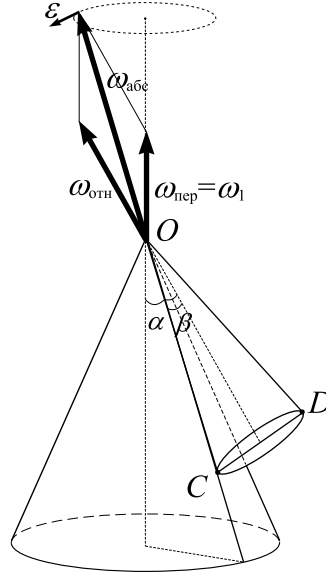
Угловое ускорение равно  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ , то есть, исходя из механического смысла производной радиус-вектора

(скорость его конца),

$$\varepsilon = [\omega_1 \times \omega]$$

Значит, вектор углового ускорения направлен ортогонально плоскости, определяемой осями симметрии конусов, в сторону вращения этой плоскости и величина его

$$\varepsilon = \omega_1 \omega \sin \alpha = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{h^2 \sin \beta \sin (\alpha + \beta)}$$



К примеру 7.

Ускорение произвольной точки  $M$  твердого тела, имеющего неподвижную точку  $O$ , находится по теореме Ривальса как геометрическая сумма вращательного ускорения

$$\mathbf{a}^{\text{вп}} = [\varepsilon \times \overrightarrow{OM}]$$

и осестремительного

$$\mathbf{a}^{\text{ос}} = [\omega \times [\omega \times \overrightarrow{OM}]], \quad a^{\text{ос}} = \omega^2 d_M$$

где  $d_M$  — расстояние от точки  $M$  до мгновенной оси вращения. Поскольку точка  $C$  лежит на мгновенной оси вращения  $\mathbf{a}_C^{\text{ос}} = 0$  и

$$\mathbf{a}_C = [\varepsilon \times \overrightarrow{OC}]$$

то есть ускорение точки  $C$  лежит в плоскости, определяемой осями симметрии конусов, перпендикулярно общей образующей, направлено в сторону подвижного конуса и его величина

$$a_C = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{h \sin \beta \cos \beta \sin (\alpha + \beta)}$$

Вращательное ускорение точки  $D$  — вектор, полученный поворотом вектора  $\mathbf{a}_C^{\text{вп}}$  в плоскости осей симметрии конусов на угол  $2\beta$  против часовой стрелки вокруг точки  $O$ . Осестремительное ускорение точки  $D$

лежит в плоскости, определяемой осями симметрии конусов, перпендикулярно мгновенной оси вращения, направлено внутрь подвижного конуса и его величина

$$a_D^{\text{oc}} = 2\omega^2 h \sin \beta = \frac{2v_0^2}{h \sin \beta}$$

Ускорение точки  $D$  равно

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_D^{\text{oc}} + \mathbf{a}_D^{\text{bp}}$$

**Замечание.** Величину абсолютной угловой скорости подвижного конуса можно найти воспользовавшись формулой Эйлера

$$\mathbf{v}_{O_1} = \mathbf{v}_O + [\boldsymbol{\omega}_{\text{abc}} \times \overrightarrow{OO_1}],$$

где  $O_1$  — центр основания подвижного конуса. Так как  $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$  и направление вектора абсолютной угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_{\text{abc}}$  конуса известно, то

$$v_0 = \omega_{\text{abc}} |\overrightarrow{OO_1}| \sin \beta.$$

Следовательно,  $\omega_{\text{abc}} = \frac{v_0}{h \sin \beta}$ .

**Пример 8.** Пользуясь теоремой сложения ускорений, определить компоненты ускорение материальной точки в полярных координатах.

*Решение.* Свяжем подвижную систему отсчета с радиус–вектором точки и введем оси  $\xi O \eta$ . В этой системе отсчета точка движется прямолинейно по закону  $r(t)$  по оси  $O\xi$ , значит, относительная скорость точки будет направлена вдоль радиус–вектора и равна  $\dot{r}$ , относительное ускорение точки равно  $\ddot{r}$  и направлено по той же прямой.

Система отсчета вращается вокруг полюса  $O$ , причем полярный угол  $\varphi$  изменяется по закону  $\varphi = \varphi(t)$ . Точки подвижной системы отсчета движутся по окружностям с центром в полюсе. Переносное ускорение точки можно найти как сумму касательного и нормального ускорений

$$a_{\text{пер}_\nu} = r\dot{\varphi}^2, \quad a_{\text{пер}_\tau} = r\ddot{\varphi}.$$

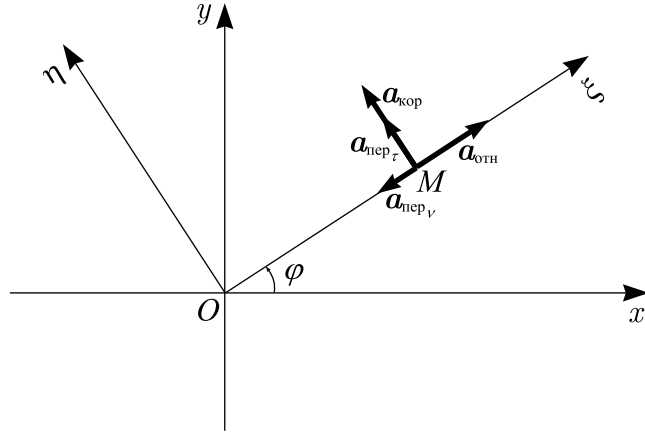
Кориолисово ускорение  $\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}]$  будет направлено ортогонально радиус–вектору в сторону вращения, то есть по оси  $O\eta$ , и равно

$$a_{\text{кор}} = 2\dot{r}\dot{\varphi}.$$

Проектируя вектор абсолютного ускорения на координатные направления  $O\xi$  и  $O\eta$ , получим радиальную и трансверсальную составляющие ускорения:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$$





К примеру 8.

**Пример 9.** Стержень  $AB$  длины  $a$  скользит своими концами  $A$  и  $B$  по сторонам неподвижного прямого угла  $xOy$  так, что его конец  $A$  движется с постоянной скоростью  $u$ . По стержню движется материальная точка  $M$  с постоянной скоростью  $v_0$ . Определить абсолютное ускорение материальной точки  $M$ , принимая в качестве параметра, определяющего положение стержня, угол  $\varphi$ , который он образует с осью  $Oy$ .

**Решение.** Для определения ускорения материальной точки воспользуемся теоремой сложения ускорений  $\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_{\text{кор}}$ . Подвижную систему отсчета свяжем со стержнем, тогда относительное движение материальной точки  $M$  прямолинейно и равномерно, таким образом, относительное ускорение точки  $M$  равно нулю  $\mathbf{a}_{\text{отн}} = 0$ . Переносное ускорение точки  $M$  можно определить, пользуясь теоремой Ривальса. Примем в качестве полюса точку  $A$ . Поскольку ускорение полюса равно нулю  $\mathbf{a}_A = 0$ , то переносное ускорение точки  $M$  стержня будет складываться из осеостремительного и вращательного ускорений  $\mathbf{a}_{\text{пер}} = \mathbf{a}_M^{\text{ос}} + \mathbf{a}_M^{\text{вп}}$

$$\mathbf{a}_M^{\text{ос}} = -\omega^2 \overrightarrow{AM}, \quad \mathbf{a}_M^{\text{вп}} = [\boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{AM}]$$

Мгновенный центр скоростей стержня  $AB$  — точка  $S$  находится на пересечении перпендикуляров к скоростям точек  $A$  и  $B$  (к осям  $Oy$  и  $Ox$  соответственно), угловая скорость стержня удовлетворяет соотношению  $\mathbf{v}_A = [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CA}]$  и значит равна

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{u}{a \sin \varphi}$$

Дифференцируя последнее выражение по времени, получаем величину углового ускорения

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = -\frac{u \dot{\varphi} \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = -\frac{u^2 \cos \varphi}{a^2 \sin^3 \varphi}$$

Осеостремительное ускорение точки  $M$  стержня направлено вдоль него к точке  $A$  и по величине равно

$$a_M^{\text{ос}} = \dot{\varphi}^2 s = \frac{u^2 s}{a^2 \sin^2 \varphi}, \quad s = AM = s_0 + v_0 t$$

Вращательное ускорение точки  $M$  направлено ортогонально к стержню в сторону убывания угла  $\varphi$  и по величине равно

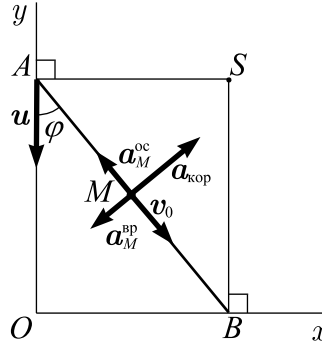
$$a_M^{\text{вп}} = |\ddot{\varphi}| s = \frac{u^2 s \cos \varphi}{a^2 \sin^3 \varphi}$$

Кориолисово ускорение  $\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_{\text{отн}}]$  будет направлено ортогонально к стержню в сторону возрастания угла  $\varphi$  и по величине равно

$$a_{\text{кор}} = \frac{2uv_0}{a \sin \varphi}$$

Таким образом, абсолютное ускорение точки  $M$ , представляемое геометрической суммой переносного и кориолисового ускорений  $\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_M^{\text{ос}} + \mathbf{a}_M^{\text{вп}} + \mathbf{a}_{\text{кор}}$ , равно

$$a_{\text{абс}} = \sqrt{\left(\frac{2uv_0}{a \sin \varphi} - \frac{u^2 s \cos \varphi}{a^2 \sin^3 \varphi}\right)^2 + \frac{u^4 s^2}{a^4 \sin^4 \varphi}}$$



К примеру 9.

**Пример 10.** Окружность радиуса  $r$  вращается в своей плоскости вокруг своей неподвижной точки  $O$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$  против часовой стрелки. Стержень  $OA$  вращается в той же плоскости вокруг точки  $O$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_2$  по часовой стрелке. На стержень и на окружность одето колечко  $M$ . Определить скорость и ускорение колечка в зависимости от величины угла  $\varphi$ , который образует радиус окружности со стержнем.

*Решение.* Определим скорость колечка, воспользовавшись теоремой сложения скоростей  $\mathbf{v}_{\text{абс}} = \mathbf{v}_{\text{пер}} + \mathbf{v}_{\text{отн}}$ . В качестве подвижной системы отсчета выберем систему осей, неизменно связанных с окружностью. Тогда по теореме Эйлера вектор переносной скорости определится по формуле

$$\mathbf{v}_{\text{пер}}^{(1)} = [\boldsymbol{\omega}_1 \times \overrightarrow{OM}], \quad v_{\text{пер}}^{(1)} = 2r\omega_1 \cos \varphi$$

Вектор относительной скорости в этой системе отсчета направлен по касательной к окружности, а потому конец вектора абсолютной скорости точки  $M$  лежит на прямой  $\Delta_1$ , параллельной касательной к окружности и проходящей через конец вектора переносной скорости  $\mathbf{v}_{\text{пер}}^{(1)}$ , поскольку вектор абсолютной скорости — диагональ параллелограмма со сторонами  $\mathbf{v}_{\text{пер}}^{(1)}$  и  $\mathbf{v}_{\text{отн}}^{(1)}$ .

В качестве второй подвижной системы отсчета выберем систему осей, неизменно связанных со стержнем. Тогда вектор переносной скорости определится по формуле

$$\mathbf{v}_{\text{пер}}^{(2)} = [\boldsymbol{\omega}_2 \times \overrightarrow{OM}], \quad v_{\text{пер}}^{(2)} = 2r\omega_2 \cos \varphi$$

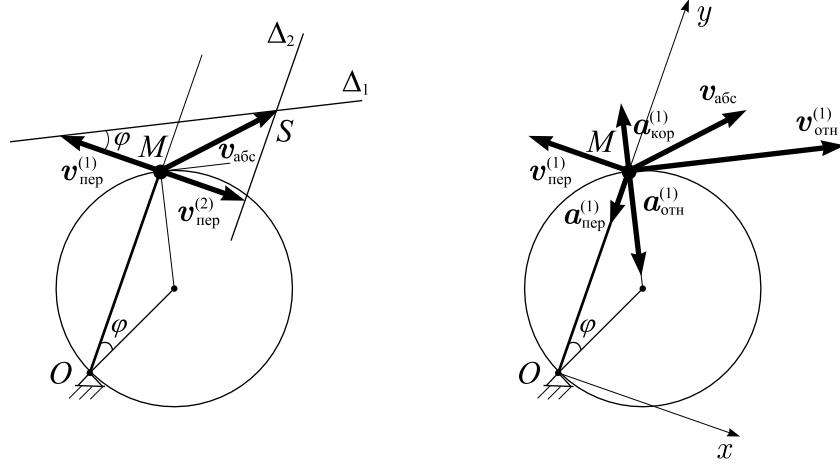
Вектор относительной скорости в этой системе направлен вдоль стержня, следовательно, конец вектора

абсолютной скорости точки  $M$  лежит на прямой  $\Delta_2$ , параллельной стержню и проходящей через конец вектора переносной скорости  $\mathbf{v}_{\text{пер}}^{(2)}$ .

Точка  $S$  пересечения прямых  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  определит положение конца вектора абсолютной скорости колесика  $M$ . Теперь нетрудно найти абсолютную скорость точки  $M$  (вектор  $\overrightarrow{MS}$ ):

$$v_{\text{отн}}^{(1)} = \frac{v_{\text{пер}}^{(1)} + v_{\text{пер}}^{(2)}}{\cos \varphi} = 2r(\omega_1 + \omega_2),$$

$$v_{\text{абс}} = 2r \sqrt{\omega_2^2 + \omega_1(\omega_1 + 2\omega_2) \sin^2 \varphi}$$



К примеру 10.

Ускорение колесика определим по теореме сложения ускорений  $\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_{\text{кор}}$ . В системе осей, неизменно связанных с окружностью, материальная точка движется по окружности с постоянной по величине скоростью  $v_{\text{отн}}^{(1)} = 2r(\omega_1 + \omega_2)$ , поэтому относительное ускорение точки в этой системе отсчета по величине равно

$$a_{\text{отн}}^{(1)} = 4r(\omega_1 + \omega_2)^2$$

и направлено к центру окружности. Так как окружность вращается с постоянной угловой скоростью, то переносное ускорение  $\mathbf{a}_{\text{пер}}^{(1)} = -\omega_1^2 \overrightarrow{OM}$  точки  $M$  по величине равно

$$a_{\text{пер}}^{(1)} = 2r\omega_1^2 \cos \varphi$$

и направлено к точке  $O$ . Кориолисово ускорение  $\mathbf{a}_{\text{кор}}^{(1)} = 2[\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_{\text{отн}}^{(1)}]$  по величине равно

$$a_{\text{кор}}^{(1)} = 4r\omega_1(\omega_1 + \omega_2)$$

и направлено от центра окружности. Проектируя эти три ускорения на оси  $Ox$  и  $Oy$ , связанные со стержнем, получаем

$$a_x = 4r\omega_2(\omega_1 + \omega_2) \sin \varphi, \quad a_y = -2r[\omega_1^2 + 2\omega_2(\omega_1 + \omega_2)] \cos \varphi$$

Тогда ускорение колесика  $M$  по величине равно  $a_{\text{абс}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ .

**Пример 11.** Стержень  $AB$  скользит своим концом  $A$  по окружности радиуса  $r$  и проходит через точку  $C$  этой окружности. Определить ускорение точки  $B$  стержня, расположенной на расстоянии  $l$  от конца  $A$ , если точка  $A$  движется с постоянной по величине скоростью  $v_0$ .

*Решение.* Выбирая в качестве полюса точку  $A$ , по теореме Ривальса

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + [\boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB}] - \omega^2 \overrightarrow{AB}$$

Нетрудно видеть, что мгновенный центр скоростей  $S$  стержня  $AB$  находится на пересечении диаметра окружности, проходящего через точку  $A$ , и перпендикуляра к стержню, восстановленного в точке  $C$ . Расстояние от точки  $A$  до мгновенного центра скоростей равно диаметру окружности и остается постоянным во все время движения. Благодаря этому, мгновенная угловая скорость стержня остается постоянной во все время движения и по величине равна

$$\omega = \frac{v_0}{2r}$$

а мгновенное угловое ускорение стержня  $\boldsymbol{\varepsilon}$  равно нулю во все время движения. Следовательно, вращательное ускорение точки  $B$  стержня равно нулю. Осестремительное ускорение точки  $B$  равно

$$a_B^{\text{ос}} = \omega^2 AB = \frac{v_0^2 l}{4r^2}$$

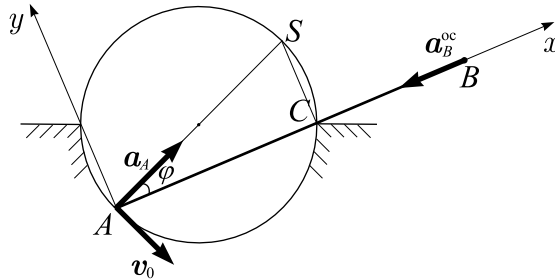
и направлено к точке  $A$ . Ускорение точки  $A$  стержня направлено к центру окружности и по величине равно

$$a_A = \frac{v_0^2}{r}$$

Рассматривая проекции ускорения точки  $B$  на направление стержня  $Ax$  и ортогональное к нему направление  $Ay$ , получим:

$$\begin{aligned} a_{Bx} &= a_A \cos \varphi - a_B^{\text{ос}} = \frac{v_0^2}{r} \cos \varphi - \frac{v_0^2 l}{4r^2}, & a_{By} &= a_A \sin \varphi = \frac{v_0^2}{r} \sin \varphi; \\ a_B &= \sqrt{(a_{Bx})^2 + (a_{By})^2} \end{aligned}$$

где  $\varphi$  — угол между стержнем  $AB$  и диаметром  $AS$ .



К примеру 11.

**Пример 12.** Окружность радиуса  $r$  катится без скольжения по по внешней стороне неподвижной окружности радиуса  $R$  так, что ее центр имеет постоянную по величине скорость  $v_0$ . Определить

ускорение точки  $S$  окружности, совпадающей в данный момент с положением мгновенного центра скоростей, и ускорение точки  $A$ , расположенной на противоположном конце диаметра, проходящего через точку  $S$ .

*Решение.* Так как при качении без скольжения скорость точки подвижной окружности, совпадающей в данный момент с точкой контакта подвижной окружности с неподвижной, равна нулю, то мгновенный центр скоростей находится в этой точке  $S$ , и мгновенная угловая скорость окружности  $\omega$  будет по величине равна

$$\omega = \frac{v_0}{r}$$

Для нахождения ускорений точек  $S$  и  $A$  воспользуемся теоремой Ривальса, выбирая в качестве полюса центр подвижной окружности  $O_1$ . Точка  $O_1$  движется по окружности радиуса  $R + r$  с постоянной по величине скоростью  $v_0$ , поэтому ускорение точки  $O_1$  равно

$$\mathbf{a}_{O_1} = -\omega_{O_1}^2 \overrightarrow{OO_1} = -\frac{v_0^2}{R+r} \frac{\overrightarrow{OO_1}}{OO_1}$$

Угловое ускорение  $\epsilon$  окружности равно нулю во все время движения, так как вектор её мгновенной угловой скорости остается во все время движения постоянным и по величине, и по направлению. Поэтому вращательные ускорения  $\mathbf{a}_S^{\text{вп}}$  и  $\mathbf{a}_A^{\text{вп}}$  точек  $S$  и  $A$  соответственно равны нулю.

Осестремительное ускорение  $\mathbf{a}_S^{\text{ос}}$  точки  $S$  равно

$$\mathbf{a}_S^{\text{ос}} = -\omega^2 \overrightarrow{O_1 S} = -\frac{v_0^2}{r} \frac{\overrightarrow{O_1 S}}{O_1 S}$$

Ускорение точки  $S$  сложится из ускорения точки  $O_1$  и осестремительного ускорения точки  $S$

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_{O_1} + \mathbf{a}_S^{\text{ос}} = -\frac{v_0^2}{R+r} \frac{\overrightarrow{OO_1}}{OO_1} - \frac{v_0^2}{r} \frac{\overrightarrow{O_1 S}}{O_1 S} = \frac{v_0^2 R}{r(R+r)} \frac{\overrightarrow{OO_1}}{OO_1}$$

то есть направлено к точке  $O_1$ .

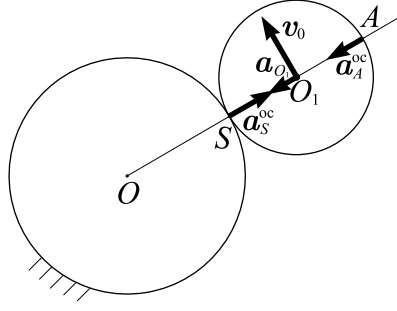
Аналогично, найдем ускорение точки  $A$ . Осестремительное ускорение  $\mathbf{a}_A^{\text{ос}}$  точки  $A$  равно

$$\mathbf{a}_A^{\text{ос}} = -\omega^2 \overrightarrow{O_1 A} = -\frac{v_0^2}{r} \frac{\overrightarrow{O_1 A}}{O_1 A}$$

В результате ускорение точки  $A$  равно

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{O_1} + \mathbf{a}_A^{\text{ос}} = -\frac{v_0^2}{R+r} \frac{\overrightarrow{OO_1}}{OO_1} - \frac{v_0^2}{r} \frac{\overrightarrow{O_1 A}}{O_1 A} = -\frac{v_0^2 (R+2r)}{r(R+r)} \frac{\overrightarrow{OO_1}}{OO_1}$$

откуда видно, что ускорение точки  $A$  направлено к центру подвижной окружности  $O_1$ .



К примеру 12.

**Пример 13.** Полый цилиндр радиуса  $2r$  вращается вокруг своей неподвижной оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\omega$  против часовой стрелки. По внутренней поверхности этого цилиндра катится без скольжения другой цилиндр радиуса  $r$  с постоянной относительной угловой скоростью  $\omega_1$  по часовой стрелке. Определить ускорение точки  $C$  малого цилиндра, совпадающей в рассматриваемый момент времени с точкой оси большого.

*Решение.* Цилиндры совершают плоско-параллельное движение параллельно плоскости ортогональной их осям. Поэтому достаточно рассмотреть движение точек системы, расположенных в плоскости перпендикулярной осям цилиндров и проходящей через точку  $C$ . Точка  $C$  во все время движения будет оставаться в этой плоскости (см. чертеж).

Ускорение точки  $C$  может быть представлено по теореме Ривальса. Если за полюс принять точку  $O_1$ , то

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_{O_1} - \Omega^2 \overrightarrow{O_1 C} + [\varepsilon \times \overrightarrow{O_1 C}]$$

где  $\Omega$  — абсолютная мгновенная угловая скорость цилиндра радиуса  $r$ , а  $\varepsilon$  — его угловое ускорение.

Поскольку точка  $O_1$  движется по окружности радиуса  $r$ , её ускорение представится как геометрическая сумма касательного и нормального ускорений

$$\mathbf{a}_{O_1} = \mathbf{a}_{O_1 \tau} + \mathbf{a}_{O_1 \nu} = \frac{dv_{O_1}}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{v_{O_1}^2}{r} \boldsymbol{\nu}$$

где  $v_{O_1}$  — абсолютная скорость точки  $O_1$ , которая может быть найдена по теореме сложения скоростей. Если подвижную систему отсчета связать с полым цилиндром, то переносная скорость точки  $O_1$  будет по величине равна  $\omega r$ , а относительная скорость —  $\omega_1 r$ . Тогда абсолютная скорость точки  $O_1$  будет по величине равна

$$v_{O_1} = (\omega + \omega_1)r = \text{const}$$

и направлена в сторону вращения полого цилиндра. Таким образом, точка  $O_1$  движется по окружности радиуса  $r$  с постоянной по величине скоростью  $v_{O_1}$  и  $\mathbf{a}_{O_1 \tau} = 0$ . Благодаря этому, ускорение полюса равно

$$\mathbf{a}_{O_1} = -\frac{v_{O_1}^2}{r} \frac{\overrightarrow{OO_1}}{OO_1} = -(\omega + \omega_1)^2 \overrightarrow{OO_1}$$

то есть направлено к точке  $O$ .

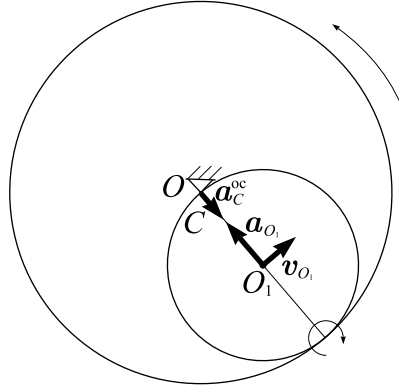
Для определенности положим  $\omega > \omega_1$ . Тогда абсолютная угловая скорость малого цилиндра по теореме сложения угловых скоростей по величине будет равна  $\Omega = \omega - \omega_1$  и малый цилиндр вращается против часовой стрелки. Поскольку вектор мгновенной угловой скорости  $\Omega$  остается постоянным и по величине, и по направлению во все время движения, угловое ускорение малого цилиндра равно нулю, и ускорение точки  $C$  малого цилиндра сложится из ускорения точки  $O_1$  и осестремительного ускорения

$$\mathbf{a}_C^{\text{ос}} = -\Omega^2 \overrightarrow{O_1 C}$$

Таким образом,

$$\mathbf{a}_C = -(\omega + \omega_1)^2 \overrightarrow{OO_1} - (\omega - \omega_1)^2 \overrightarrow{O_1 C} = -4\omega\omega_1 r \frac{\overrightarrow{OO_1}}{OO_1}$$

откуда видно, что ускорение направлено к точке  $O$ .



К примеру 13.

**Пример 14.** Шарнирный параллелограмм  $OAA_1O_1$  имеет две неподвижные точки:  $O$  и  $O_1$ . Сторона  $OA$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг неподвижной точки  $O$  в плоскости чертежа против часовой стрелки. По стороне  $AA_1$  с постоянной скоростью  $v$  движется точка  $M$ . Определите величины и направления абсолютных скорости и ускорения точки  $M$  в тот момент, когда  $\angle O_1OA = \alpha$ , считая, что  $OA = a$ ,  $AA_1 = b$ .

*Решение.* Свяжем подвижную систему отсчета со стержнем  $AA_1$ , который движется поступательно. Следовательно, независимо от положения точки  $M$  переносные скорость и ускорение точки  $M$  будут равны соответственно скорости и ускорению точки  $A$ , то есть

$$\mathbf{v}_{\text{пер}} = [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OA}], \quad \mathbf{a}_{\text{пер}} = -\omega^2 \overrightarrow{OA}$$

Так как в этой системе отсчета точка  $M$  движется прямолинейно и равномерно

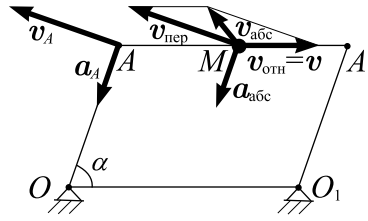
$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = v \frac{\overrightarrow{AA_1}}{AA_1}, \quad \mathbf{a}_{\text{отн}} = 0$$

Кориолисово ускорение равно нулю, поскольку подвижная система отсчета движется поступательно. Таким образом,

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OA}] + v \frac{\overrightarrow{AA_1}}{AA_1}, \quad \mathbf{a}_{\text{абс}} = -\omega^2 \overrightarrow{OA}$$

Величины абсолютных скорости и ускорения точки  $M$  равны

$$v_{абс} = \sqrt{\omega^2 a^2 + v^2 - 2\omega a v \sin \alpha}, \quad a_{абс} = \omega^2 a$$



К примеру 14.

Если подвижную систему отсчета связать со стержнем  $OA$ , решение значительно усложнится. Полезно провести это решение и убедиться, что результат будет тот же.

### Указания к задачам главы 1 "Кинематика" сборника "Задачи по теоретической механике"

- 1.1. Воспользоваться фокальным уравнением эллипса и  $\theta = \omega t$  ( $\theta$  — истинная аномалия).
- 1.2. Выписать выражения для скорости точки и секторной скорости в полярных координатах.
- 1.3. Выписать выражения для скорости и ускорения точки в полярных координатах.
- 1.4. Рассмотреть представление векторов скорости и ускорения в полярных координатах и в естественных осях.
- 1.5. См. 1.3.
- 1.6. См. 1.3.
- 1.7. Рассмотреть представление вектора ускорения в естественных осях.
- 1.8. Связать компоненты ускорения в естественных осях  $\mathbf{a}(a_\tau, a_\nu)$  с векторами скорости и ускорения точки.
- 1.9. Так как  $\rho = \frac{v^2}{a_\nu}$ , то необходимо найти выражения для величины скорости  $v$  и нормальной составляющей ускорения  $a_\nu$  в зависимости от  $x$ .
- 1.10. См. 1.4. Найти выражение для нормальной составляющей ускорения.
- 1.11. Найти скорость и ускорение точки. Вычислить нормальную составляющую ускорения, воспользоваться формулой  $\rho = \frac{v^2}{a_\nu}$ .
- 1.12. См. 1.11.
- 1.13. Дифференциальное уравнение кривой следует из представления компонент вектора скорости точки в сферических координатах.
- 1.14. См. 1.13.
- 1.15. Из выражений компонент вектора скорости точки в полярных координатах согласно условию задачи получить дифференциальное уравнение траектории.



- 1.16.** Построить вектор абсолютной скорости точки  $M$ , исходя из выбора подвижных систем отсчета, связанных с прямыми  $AB$  и  $CD$  последовательно.
- 1.17.** Построить вектор абсолютной скорости лодки, выбрав подвижные системы отсчета, связанными 1) с водой и 2) с лучом  $AM$ .
- 1.18.** Построить параллелограмм скоростей точки  $M$ , связав подвижную систему отсчета с подвижной окружностью.
- 1.19.** Найти направление вектора абсолютной скорости точки  $M$  по теореме сложения скоростей, выбрав за подвижную систему отсчета радиус-вектор точки  $M$ . Установить подобие треугольника  $\triangle OAM$  и треугольника скоростей точки  $M$ .
- 1.20.** Рассмотреть движение точки по эллипсу как сложное, выбрав за подвижные системы отсчета ее радиус-векторы с полюсами в фокусах эллипса. Из определения эллипса следует, что  $\dot{r}_1 = -\dot{r}_2$ , то есть относительные скорости точки равны по величине. Аналогично для гиперболы.
- 1.21.** Аналогично **1.20.** рассмотреть движение точки, выбрав за подвижные системы отсчета 1) связанную с радиус-вектором точки, проведенным из фокуса, и 2) декартову систему с осями: директриса и перпендикуляр к ней, проходящий через точку.
- 1.22.** Использовать представление скорости в полярных координатах.
- 1.23.** По теореме сложения скоростей, связав подвижную систему отсчета с радиус-вектором  $OM$ ,  $v_{\text{абс}}^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2$ . Отсюда следуют необходимые выражения для  $r(t)$  и  $v(t)$ . По теореме сложения ускорений получить ускорение.
- 1.24.** См. **1.23.**
- 1.25.** Связав подвижную систему отсчета с диском, применить теоремы сложения скоростей и ускорений для точки  $M$ .
- 1.26.** Связав подвижную систему отсчета с окружностью, применить теоремы сложения скоростей и ускорений для точки  $M$ .
- 1.27.** См. **1.25.**
- 1.28.** Построить параллелограмм скоростей, связав подвижную систему отсчета со стержнем  $OC$ .
- 1.29.** Найти проекции относительного, переносного и кориолисова ускорений на подвижные оси  $Ox$  и  $Oy$ .
- 1.30.** Использовать результат задачи **1.29.**
- 1.31.** Связав подвижную систему отсчета с конусом, применить теорему сложения ускорений.
- 1.32.** Связав подвижную систему отсчета с шаром, применить теорему сложения ускорений.
- 1.33.** Связав подвижную систему отсчета с плоскостью прямоугольника  $ABCD$ , применить теорему сложения ускорений.
- 1.34.** Связав подвижную систему отсчета с плоскостью диска, применить теорему сложения ускорений.
- 1.35.** Связав подвижную систему отсчета с плоскостью кольца, применить теорему сложения ускорений.

**1.36.** См. 1.34.

**1.37.** Связав подвижную систему отсчета с плоскостью диска, применить теорему сложения ускорений.

**1.38.** Стержень  $OA$  — твердое тело с неподвижной точкой  $O$ .

**1.39.** Построить параллелограмм скоростей центра ролика, связав подвижную систему отсчета с полудиском,  $v_{abc} = v_{пер} \cdot \operatorname{tg} \varphi$ .

**1.40.** Построить параллелограмм скоростей конца  $A$ , связав подвижную систему отсчета с профилем.

**1.41.** Связав подвижную систему отсчета с Землей, воспользоваться формулой для кориолисова ускорения.

**1.42.** См. 1.41.

**1.43.** Подвижную систему отсчета связать с вращающейся плоскостью, в которой находятся точки  $A$  и  $B$ . Во вращающейся плоскости ввести полярную систему координат.

**1.44.** Связать подвижную систему отсчета с плоскостью трапеции, применить теорему сложения ускорений.

**1.45.** Доказать формулы

$$\dot{v}_{пер} = a_{пер} + [\omega \times v_{отн}], \quad \dot{v}_{отн} = a_{отн} + [\omega \times v_{отн}]$$

где  $\omega$  — угловая скорость подвижной системы отсчета.

**1.46.** См. 1.45.

**1.47.** Применить теорему сложения ускорений, рассматривая движение точки  $M$  как сложное. Треугольник  $Mxyz$  движется относительно подвижной системы отсчета, связанной с Землей и  $v_{отн} = v_E e_x + v_N e_y + v_h e_z$ .

**1.48., 1.49., 1.50., 1.51., 1.52., 1.53., 1.54.** Построить мгновенный центр скоростей.

**1.55.** Найти мгновенную угловую скорость стержня  $AB$ , исходя из положения мгновенного центра скоростей. Применить теорему Ривальса, связав ускорения точек  $A$  и  $B$ .

**1.56.** Рассмотреть поле скоростей стержня  $AB$ . Применить теорему Ривальса, связав ускорения точек  $A$  и  $B$ .

**1.57.** См. 1.56. Найти осестремительное ускорение точки  $B$  как точки стержня  $O_1B$ .

**1.58.** Применить теорему Ривальса, связав ускорения точек  $B$  и  $C$  стержня  $BC$ . Найти осестремительное ускорение точки  $C$  как точки стержня  $CD$ .

**1.59.** Найти мгновенную угловую скорость угла  $AME$  как функцию угла  $\varphi$ , исходя из положения мгновенного центра скоростей. Применить теорему Ривальса, связав ускорения точек  $A$  и  $M$ .

**1.60.** Найти мгновенную угловую скорость  $\omega$  и мгновенное угловое ускорение  $\varepsilon$  колеса для данного момента времени. Найти угол  $\alpha$  ( $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ ), составляемый ускорением точки колеса с ее радиус-вектором относительно центра ускорений.

- 1.61.** Сначала найти мгновенную угловую скорость стержня  $AB$ , затем применить теорему Ривальса, связывающую ускорения точек  $A$  и  $B$  стержня. Найти ускорение точки  $A$  как точки диска.
- 1.62.** Воспользоваться выражениями для ускорений точек  $M$  и  $N$  из теоремы Ривальса, приняв за полюс точку  $A$ . Предварительно найти мгновенную угловую скорость и мгновенное угловое ускорение подвижной шестерни.
- 1.63.** См. **1.62.**
- 1.64.** Уравнения для мгновенной угловой скорости и мгновенного углового ускорения стержня  $AB$  следуют из теоремы Ривальса, связывающей ускорения точек  $A$  и  $B$  стержня.
- 1.65.** Воспользоваться свойствами мгновенного центра ускорений.
- 1.66.** См. **1.64.**
- 1.67.** Выразить ускорение середины стержня по теореме Ривальса, приняв за полюса последовательно точки  $A$  и  $B$ .
- 1.68.** Мгновенный центр скоростей подвижного диска находится в точке пересечения продолжений прямолинейных участков ремня. Применить теорему Ривальса для указанных точек, приняв за полюс точку  $A$ .
- 1.69.** Мгновенная ось вращения колеса проходит через точку  $O_1$ , расположенную над центром трека на высоте  $r$ , и точку касания колеса с треком. Применить теорему сложения угловых скоростей, представив движение диска как сумму двух вращений. Мгновенное угловое ускорение колеса — скорость конца вектора его мгновенной угловой скорости.
- 1.70.** См. **1.69.**  $\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_M^{\text{ос}} + \mathbf{a}_M^{\text{вп}}$ .
- 1.71.** Точка  $O$  для диска является неподвижной точкой. Применить теорему сложения угловых скоростей, представив движение диска как сумму двух вращений, считая что подвижная система отсчета связана с плоскостью  $zOC$ .
- 1.72.** См. **1.71.**
- 1.73.** Представить движение конуса  $A$  как сумму двух вращений, считая что подвижная система отсчета связана с плоскостью  $zOy$ .
- 1.74.** Точка  $O$  для диска является неподвижной точкой. Представить движение диска как сумму двух вращений вокруг оси конуса с подвижной системой отсчета, определяемой радиусом  $OA$  и осью конуса, и вокруг нормали к плоскости диска в точке  $O$  во введенной системе.
- 1.75.** См. **1.73.**
- 1.76.** Точка  $O$  для шестерни III является неподвижной точкой. Применить дважды теорему сложения угловых скоростей, выбрав за подвижные системы отсчета последовательно шестерни I и II.
- 1.77.** Уравнения для проекций мгновенной угловой скорости следуют из теоремы Эйлера, связывающей скорости точек  $M_1$  и  $M_2$ . Мгновенная ось вращения находится из условия, что скорости точек, лежащих

на ней, равны нулю.

**1.78.** См. **1.76.**

**1.79.** Построить вектор мгновенной угловой скорости  $\Pi$  шестерни, представив ее движение как сумму вращений 1) с  $I$  шестерней и относительно нее и 2) с валом и относительно вала.

**1.80.** Найти мгновенную ось вращения волчка, применив теорему сложения угловых скоростей.

**1.81.** Найти мгновенную ось вращения диска, применив теорему сложения угловых скоростей.

**1.82.** См. **1.81.**

**1.83.** Выразить скорость точки касания шара с плоскостью по теореме Эйлера и приравнять её нулю.

**1.84.** Построить параллелограмм скоростей для точки  $A$ , связав подвижную систему отсчета с отрезком  $AC$ , с началом в точке  $C$ .

**1.85.** Построить параллелограмм скоростей для точки  $B$ , связав подвижную систему отсчета с радиус-вектором диска, проведенным в точку схода нити, и прямолинейным отрезком нити.

**1.86.** При выборе подвижной системы отсчета, связанной с диском, данные задачи определяют все необходимые величины для применения теорем сложения скоростей и ускорений точки  $A$ .

**1.87.** Записать теорему Эйлера для центра цилиндра  $A$  и точки касания.

**1.88.** Построить вектор скорости клина, представив его движение как сложное, последовательно выбирая подвижные системы отсчета, связанными с брусками.

**1.89.** Построить параллелограмм скоростей для точки  $A$ , если подвижная система отсчета, связана с колесом  $B$ .

**1.90.** Применить теорему Эйлера.

**1.91.** Связав подвижную систему отсчета с "водителем" применить теорему сложения ускорений для точки  $M$  диска.

**1.92.** См. **1.91.** Найти скорость точки  $M$  относительно "водителя" используя теорему сложения скоростей.

**1.93.** Построить мгновенный центр скоростей промежуточной шестерни и найти ее мгновенную угловую скорость, а затем найти мгновенный центр скоростей ведомой шестерни и найти ее мгновенную угловую скорость.

**1.94.** В системе отсчета, связанной с призмой, цилиндр совершает плоско-параллельное движение: мгновенный центр скоростей находится в точке  $D$ . Исходя из этого, определяются относительные ускорение и скорость точки  $A$ .

**1.95.** В подвижной системе отсчета, связанной со стержнем  $AB$ , диск совершает плоско-параллельное движение. Абсолютные скорости и ускорения указанных точек определяются по теоремам сложения скоростей и ускорений.

**1.96.** Воспользоваться тем, что подвижная шестерня движется поступательно.

**1.97.** В системе отсчета, связанной с шестерней  $B$ , шестерня  $A$  совершает качение без скольжения. Исходя

из этого, определяются относительные скорость и ускорение точки  $D$ .

**1.98.** В системе отсчета, связанной с диском, точка  $A$  движется по прямой по заданному закону. Применить теоремы сложения скоростей и ускорений.

**1.99.** Конус  $I$  — твердое тело с неподвижной точкой  $O$ . В системе отсчета, связанной с конусом  $I$ , точка  $M$  движется по прямой по заданному закону. Применить теорему сложения ускорений для точки  $M$ . Переносное ускорение определяется как ускорение соответствующей точки твердого тела.

**1.100.** Крестовина — твердое тело с неподвижной точкой  $E$ . Построить вектор мгновенной угловой скорости крестовины, рассматривая ее движение как сумму вращений, выбрав последовательно подвижные системы отсчета, связанные с одной и другой вилками при фиксированном угле  $\varphi$ .

**1.101.** Найти компоненты мгновенной угловой скорости из теоремы Эйлера для точек  $B$  и  $C$ , выбрав за полюс точку  $A$ . Мгновенная ось вращения проходит через точку  $A$  и ее направляющий вектор — вектор мгновенной угловой скорости.

**1.102.** Найти компоненты мгновенной угловой скорости из уравнений Эйлера, связывающих скорости точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Винтовая ось находится из условия, что скорости точек, лежащих на ней, параллельны мгновенной угловой скорости.

**1.103.** Скорость и ускорение центра кривизны по определению находятся последовательным дифференцированием по времени, используя формулы Френе, соотношения

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM} + \rho \boldsymbol{\nu}$$

где  $\overrightarrow{OK}$  — радиус-вектор центра кривизны,  $\overrightarrow{OM}$  — радиус-вектор точки  $M$ ,  $\rho$  — радиус кривизны,  $\boldsymbol{\nu}$  — вектор главной нормали.

**1.104.** Использовать формулы Френе и формулы Пуассона.

**1.105.** Воспользоваться определением вектора вихря и теоремой Эйлера.

**1.106.** Центр шара движется по окружности, его ускорение имеет две составляющие: нормальную и касательную.