МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ЗАДАЧНИК ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

издание четвёртое

Москва, 2017

Задачник по теоретической механике / Под ред. К. Е. Якимовой. — 4-е изд. — М.: МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический ф-т, каф. теоретической механики и мехатроники, 2017. — 108 стр.

Настоящий задачник предназначен для студентов механико-математических факультетов университетов, изучающих теоретическую механику.

В четвёртом издании исправлены обнаруженные ошибки и неточности.

© Кафедра теоретической механики и мехатроники
механико-математического факультета
МГУ имени М. В. Ломоносова, 2017 г.

Оглавление

Предисловие **4**

1 Кинематика **5**
1.1 Скорость и ускорение точки 5
1.2 Сложное движение точки 9
1.3 Кинематика абсолютно твёрдого тела 17
1.4 Смешанные задачи 29

2 Динамика **35**
2.1 Динамика точки 35
2.2 Геометрия масс 51
2.3 Динамика системы материальных точек 54
2.4 Движение твёрдого тела с неподвижной точкой 67
2.5 Движение при наличии трения 71

Ответы **78**

Рекомендуемая литература **106**

Предисловие

Данный «Задачник по теоретической механике» является исправленным и дополненным вариантом пособия «Задачник по классической механике», выпущенного в 2001 году. Новый вариант задачника — четвёртое его издание. В процессе работы в него вносились некоторые изменения и исправления, обсуждаемые на заседаниях методического семинара кафедры теоретической механики и мехатроники.

В работе по подготовке задачника к печати участвовали И. Л. Антонов, Т. Ф. Барбашова, В. Г. Вильке, Ю. Ф. Голубев, А. В. Карапетян, Е. И. Кугушев, А. С. Кулешов, Е. В. Мелкумова, Т. В. Попова, Т. В. Сальникова, Я. В. Татаринов, Д. В. Трещёв, А. Н. Швец, К. Е. Якимова.

Среди включённых в сборник задач есть оригинальные, однако большинство задач заимствовано из задачников И. В. Мещерского [18], Н. Н. Бухгольца, И. М. Воронкова и А. П. Минакова [11], Е. С. Пятницкого, Н. М. Трухан, Ю. И. Ханукаева, Г. Н. Яковенко [19] и др. Часть заимствованных задач переформулирована с целью уменьшить количество технических терминов (таких как шатун, ползун, кривошип и т. п.), не определяющих существа рассматриваемой кинематической или динамической задачи, но требующих дополнительных разъяснений.

Каждому разделу сборника предпослана небольшая теоретическая часть, содержащая основные теоремы и формулы, которые могут быть полезны при решении входящих в него задач.

В четвёртом издании исправлены обнаруженные ошибки и неточности и составлен новый оригинал-макет. Эта работа выполнена Антоном Николаевичем Швецом, за что составители задачника ему очень признательны.

1. Кинематика

1.1. Скорость и ускорение точки

Движение некоторой точки A рассматривается в евклидовом пространстве относительно ортонормированного репера $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$. Положение этой точки в пространстве задаётся её радиусом-вектором

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z,$$

где (x, y, z) — декартовы координаты точки. Функция $\mathbf{r}(t)$,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z,$$

где t — время, задаёт закон движения точки A относительно репера $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$.

Кривая, описываемая движущейся точкой A в пространстве, называется *траекторией* точки.

Скорость $\mathbf{v}$ точки A относительно репера $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ определяется выражением

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z.$$

Ускорение $\mathbf{a}$ точки A относительно репера $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ имеет вид

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z = \\ = \dot{v}_x\mathbf{e}_x + \dot{v}_y\mathbf{e}_y + \dot{v}_z\mathbf{e}_z = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z.$$

Если декартовы координаты точки A заданы как функции каких-либо скалярных аргументов $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$, то аргументы q_1, q_2, q_3 называются *криволинейными координатами* точки.

Точке A ставится в соответствие локальный нормированный репер $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ с единичными векторами

$$\mathbf{e}_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right\|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Проекции ускорения на оси с направляющими векторами $\mathbf{e}_i$ выражаются формулами

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right\|^{-1} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{v^2}{2} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2} \right) \right).$$

Криволинейные координаты называются *ортогональными,* если единичные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ взаимно перпендикулярны. Примером могут служить *цилиндрические координаты*

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

для которых

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z,$$
$$v_1 = v_r = \dot{r}, \quad v_2 = v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_3 = v_z = \dot{z}.$$

При $z = \text{const}$ цилиндрические координаты переходят в *полярные.*

Секторной скоростью точки называется величина

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}.$$

Другим примером являются *сферические координаты*

$$x = r\cos\theta\cos\varphi, \quad y = r\cos\theta\sin\varphi, \quad z = r\sin\theta,$$

для которых

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \theta,$$
$$v_1 = v_r = \dot{r}, \quad v_2 = v_\varphi = r\dot{\varphi}\cos\theta, \quad v_3 = v_\theta = r\dot{\theta}.$$

Помимо описанных выше координатных способов представления скорости и ускорения используется представление этих векторов с помощью естественного (или сопутствующего) трёхгранника.

Естественным трёхгранником называют подвижный трёхгранник с началом в движущейся точке A, образованный единичным вектором касательной к траектории $\boldsymbol{\tau}$, главной нормалью $\boldsymbol{\nu}$ и бинормалью $\boldsymbol{\beta}$,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \boldsymbol{\nu} = \rho\cdot\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}, \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu},$$

где ρ — радиус кривизны траектории в точке, совпадающей с точкой A, а дифференциал длины дуги ds траектории выражается формулой

$$ds = v\,dt \quad \text{или} \quad v = \dot{s}.$$

Проекции скорости и ускорения на оси естественного трёхгранника имеют вид

$$v_{\boldsymbol{\tau}} = \dot{s}, \quad v_{\boldsymbol{\nu}} = v_{\boldsymbol{\beta}} = 0,$$
$$a_{\boldsymbol{\tau}} = \dot{v} = \ddot{s}, \quad a_{\boldsymbol{\nu}} = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_{\boldsymbol{\beta}} = 0.$$

1.1. В плоскости эллипса с полуосями a и b вокруг его фокуса F с постоянной угловой скоростью ω вращается луч FM. Найти скорость точки M пересечения этого луча с эллипсом как функцию расстояния r от фокуса F до точки M.

1.2. Точка описывает плоскую траекторию так, что её секторная скорость пропорциональна модулю радиус-вектора, а радиальная скорость постоянна, т. е.

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}br, \quad v_r = c,$$

где b и c — некоторые положительные постоянные. Зная начальные условия $\varphi = 0$ и $r = r_0$ при $t = 0$, найти траекторию точки и закон движения.

1.3. Точка описывает плоскую траекторию так, что модуль её скорости есть постоянная величина c, а полярный угол изменяется по закону $\varphi = \omega t$. Найти траекторию точки, если известно начальное условие $r = 0$ при $\varphi = 0$.

1.4. Точка описывает плоскую траекторию с постоянной по величине скоростью v так, что вектор ускорения точки всё время направлен на данную неподвижную точку O. Найти траекторию точки, если в начальный момент времени она находилась на расстоянии b от точки O.

1.5. Точка описывает плоскую кривую так, что прямая, по которой направлено её ускорение $\mathbf{a}$, всё время проходит через неподвижную точку O. Определить условие применимости формулы

$$a = \pm v \cdot \frac{dv}{dr},$$

где v — величина скорости точки, r — расстояние до точки O. Знак «+» берётся в том случае, когда ускорение направлено от точки O, и знак «−» в противоположном случае.

1.6. Точка описывает плоскую траекторию так, что её радиальная скорость положительна и постоянна, а радиальное ускорение отрицательно и обратно пропорционально кубу расстояния до полюса, т. е.

$$v_r = b > 0, \quad a_r = -\frac{c^2}{r^3}, \quad c > 0.$$

Найти траекторию и секторную скорость точки при заданных начальных условиях $r(0) = r_0$ и $\varphi(0) = \varphi_0$ и $\dot{\varphi}(0) > 0$.

1.7. Точка движется в плоскости Oxy так, что проекция её скорости на ось Ox постоянна и равна c. Показать, что в этом случае величина ускорения определяется формулой

$$a = \frac{v^3}{c\rho},$$

где v — величина скорости точки, а ρ — радиус кривизны траектории.

1.8. В декартовых координатах задан закон движения точки

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Найти величины касательной и нормальной составляющих ускорения.

1.9. Закон движения материальной точки, брошенной в пустоте со скоростью v_0 под углом α_0 к горизонту, имеет вид

$$x = bt, \quad y = ct - \frac{gt^2}{2},$$

где $b = v_0 \cos\alpha_0$ и $c = v_0 \sin\alpha_0$. Найти радиус кривизны траектории в зависимости от абсциссы x, в частности, в вершине траектории.

1.10. Движение точки задано в полярных координатах уравнениями $r = be^{kt}$ и $\varphi = kt$, где b и k — известные постоянные величины. Выразить скорость и ускорение точки и радиус кривизны её траектории в зависимости от r.

1.11. Дан закон движения точки

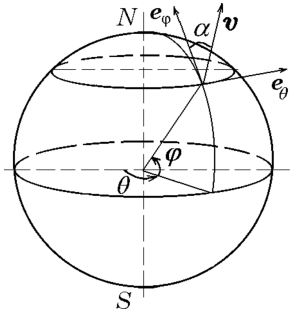
$$x = bt, \quad y = \frac{b(e^t + e^{-t})}{2} = b\,\mathrm{ch}\,t.$$

Найти траекторию точки. Выразить радиус кривизны траектории как функцию координаты y.

1.12. Точка M движется по винтовой линии. В цилиндрических координатах её закон движения имеет вид $r = b$, $\varphi = kt$, $z = \nu t$. Найти выражения скорости и ускорения точки в этих координатах, касательную и нормальную составляющие ускорения, а также радиус кривизны винтовой линии.

1.13. Какую кривую опишет корабль, идущий под постоянным курсовым углом α к географическому меридиану? Корабль считать точкой, движущейся по поверхности земного шара.

Указание. Воспользоваться сферическими координатами r, θ и φ.



1.14. В условиях предыдущей задачи, считая, что величина скорости v корабля не изменяется, определить проекции ускорения корабля на оси сферической системы координат, величину его ускорения и радиус кривизны локсодромии.

1.15. Какую кривую опишет корабль, сохраняющий постоянный угол пеленга α на неподвижную точку O (угол между направлением скорости корабля и направлением на точку)? Корабль считать точкой, движущейся в плоскости. Воспользоваться полярными координатами (r, φ) с началом в точке O; в начальный момент времени корабль находится в точке $(r_0, 0)$. Исследовать частные случаи $\alpha = 0$, $\frac{\pi}{2}$ и π.

1.2. Сложное движение точки

Пусть точка движется относительно некоторой неизменяемой системы отсчёта (твёрдого тела Σ), с которой связана система координат $O\xi\eta\zeta$; эта система, в свою очередь, движется относительно другой системы отсчёта (твёрдого тела S), с которой связана система координат O_1xyz. Пусть $\mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta)$ и $\mathbf{R}(x, y, z)$ — радиус-векторы точки в соответствующих системах отсчёта.

Таким образом, точка участвует в двух движениях: относительно системы отсчёта Σ и вместе с ней относительно системы S. Говорят, что точка совершает сложное движение. Движение точки относительно системы $O\xi\eta\zeta$ называется *относительным;* так же скорость и

ускорение в этом движении называют *относительными.* Они определяются формулами

$$\mathbf{v}_{\text{отн.}} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\xi}\mathbf{e}_{\xi} + \dot{\eta}\mathbf{e}_{\eta} + \dot{\zeta}\mathbf{e}_{\zeta},$$
$$\mathbf{a}_{\text{отн.}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\xi}\mathbf{e}_{\xi} + \ddot{\eta}\mathbf{e}_{\eta} + \ddot{\zeta}\mathbf{e}_{\zeta},$$

где $\mathbf{r}(t)$ определяет закон относительного движения в системе отсчёта $\Sigma\,(O\xi\eta\zeta)$.

Абсолютными скоростью и ускорением называются

$$\mathbf{v}_{\text{абс.}} = \dot{\mathbf{R}} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z,$$
$$\mathbf{a}_{\text{абс.}} = \ddot{\mathbf{R}} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z,$$

где $\mathbf{R}(t)$ определяет закон абсолютного движения в системе отсчёта S (O_1xyz).

Теорема сложения скоростей говорит, что абсолютная и относительная скорости точки в любой момент времени связаны соотношением

$$\mathbf{v}_{\text{абс.}} = \mathbf{v}_{\text{отн.}} + \mathbf{v}_{\text{пер.}},$$

где $\mathbf{v}_{\text{пер.}}$ — переносная скорость точки, определяемая как скорость той точки подвижной системы отсчёта $O\xi\eta\zeta$, в которой находится точка в данный момент времени. Она вычисляется как скорость точки твёрдого тела (по теореме Эйлера).

Теорема сложения ускорений *(теорема Кориолиса)* устанавливает связь между абсолютным и относительным ускорениями точки в любой момент времени

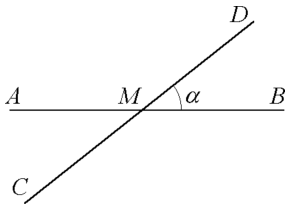
$$\mathbf{a}_{\text{абс.}} = \mathbf{a}_{\text{отн.}} + \mathbf{a}_{\text{пер.}} + \mathbf{a}_{\text{кор.}},$$

где $\mathbf{a}_{\text{пер.}}$ — переносное ускорение точки — ускорение той точки подвижной системы отсчёта, в которой находится точка в данный момент времени (вычисляется по теореме Ривальса); величина

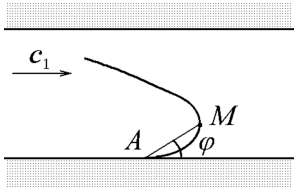
$$\mathbf{a}_{\text{кор.}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн.}}$$

называется *ускорением Кориолиса (кориолисовым ускорением);* $\boldsymbol{\omega}$ — *угловая скорость* подвижной системы отсчёта.

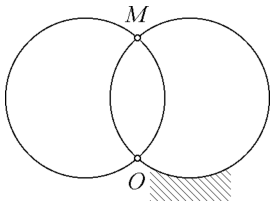
1.16. Прямая AB движется поступательно со скоростью v_1, перпендикулярной к AB, а прямая CD — поступательно со скоростью v_2, перпендикулярной к CD. Найти величину скорости точки M пересечения этих прямых, если угол между ними равен α.



1.17. Лодку M, уносимую течением реки, подтягивают верёвкой к точке A берега. Найти абсолютную скорость и траекторию лодки, считая её точкой. Принять, что скорость c_1 течения реки постоянна по всей её ширине, скорость наматывания верёвки постоянна и равна c_2, и что скорость лодки относительно системы координат, связанной с водой, направлена вдоль верёвки.



1.18. Проволочная окружность радиуса R вращается в своей плоскости вокруг неподвижной оси O с постоянной угловой скоростью ω. Найти скорость точки M пересечения этой окружности с неподвижной окружностью того же радиуса, проходящей также через точку O.

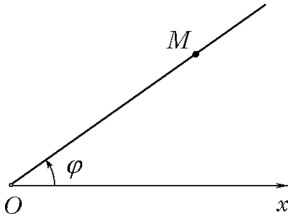


1.19. Точка движется по архимедовой спирали $r = at$, $\varphi = bt$. Доказать следующий способ построения касательной к этой кривой: соединив движущуюся точку M с полюсом O, проведём из точки O перпендикуляр к OM и на этом перпендикуляре отложим в сторону вращения радиус-вектора отрезок OA длины $\frac{a}{b}$. Прямая, проведённая через точку M перпендикулярно к MA, и будет касательной к спирали в точке M.

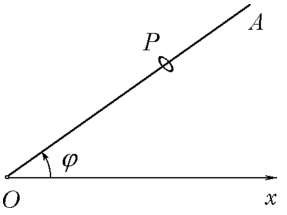
1.20. Точка описывает эллипс. Пользуясь тем, что сумма расстояний от этой точки до фокусов эллипса являются постоянной величиной, показать, что нормаль к эллипсу в этой точке делит пополам угол между радиус-векторами, проведёнными из фокусов в эту точку. Аналогично доказать, что касательная к гиперболе делит пополам угол между радиус-векторами, соединяющими точку касания с фокусами гиперболы.

1.21. Точка движется по параболе. Пользуясь тем, что расстояние от неё до директрисы и до фокуса параболы во всё время движения равны между собой, показать, что касательная к параболе образует равные углы с радиус-вектором этой точки, проведённым из фокуса, и осью параболы.

1.22. В неподвижной плоскости вокруг точки O вращается прямая так, что угол φ между прямой и осью Ox изменяется по закону $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$. В момент, когда прямая совпадает с осью Ox, из точки O начинает двигаться вдоль прямой точка M. Подобрать такой закон движения точки по прямой, чтобы она сохраняла постоянную по величине абсолютную скорость v. Найти траекторию и ускорение точки.

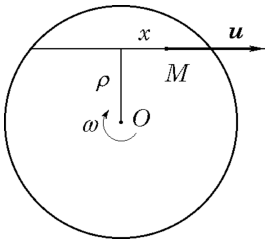


1.23. В неподвижной плоскости Oxy вокруг данной точки O вращается стержень OA так, что угол φ между стержнем и осью Ox изменяется по закону $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$. Кольцо P движется вдоль стержня по закону $OP = a_0(1 + \sin \omega_0 t)$. Найти величины абсолютных скорости и ускорения кольца, пренебрегая его размерами.

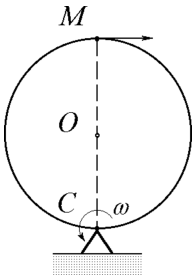


1.24. В неподвижной плоскости Oxy стержень OA вращается вокруг точки O по закону $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$. По стержню скользит кольцо P по закону $OP = \frac{1}{2} a_0 t^2$. Найти величины абсолютных скорости и ускорения кольца, пренебрегая его размерами.

1.25. Диск вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к его плоскости. По хорде диска, удалённой на расстояние ρ от центра диска, движется с постоянной относительной скоростью u точка M. Найти величины абсолютных скорости и ускорения точки M в зависимости от расстояния x до середины хорды.

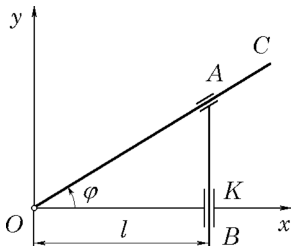


1.26. Окружность радиуса r вращается в своей плоскости с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки вокруг неподвижной точки C, лежащей на окружности. Точка M движется по этой окружности по часовой стрелке со скоростью $2\omega r$. В начальный момент точки M и C и центр окружности O лежат на одной прямой. Определить абсолютную траекторию точки M, её скорость и ускорение.



1.27. Диск радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к его плоскости. По диаметру диска, выходя из его центра, движется точка по закону $s = R\sin\omega t$. Найти абсолютные траекторию, скорость и ускорение точки.

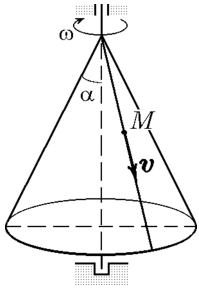
1.28. В неподвижной плоскости Oxy вокруг некоторой точки O вращается стержень OC. Стержень AB движется в направляющих K так, что он всегда остаётся параллельным оси Oy, а точка A находится на стержне OC. Расстояние OK равно l. Определить скорость движения точки A относительно стержня OC как функцию угла φ между стержнем OC и осью Ox и его производной $\dot{\varphi} = \omega$.



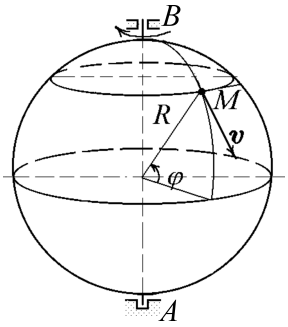
1.29. Плоскость Oxy вращается вокруг оси Oz с переменной угловой скоростью ω. Движение точки M в этой плоскости задано уравнениями $x = x(t)$ $y = y(t)$. Найти проекции абсолютного ускорения точки на подвижные оси Ox и Oy.

1.30. В предыдущей задаче, полагая $\omega = \text{const}$, найти относительное движение точки, если 1) абсолютное ускорение точки совпадает с её переносным ускорением и начальная относительная скорость v_0 не равна нулю. 2) абсолютное ускорение совпадает с относительным ускорением, а в начальный момент расстояние OM было равно r_0.

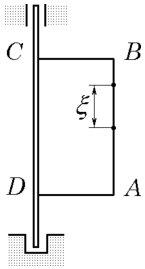
1.31. Круговой конус с углом раствора 2α вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. Точка M выходит из вершины конуса и движется равномерно по его образующей со скоростью v. Выразить величину абсолютного ускорения точки M как функцию времени, прошедшего с момента начала движения точки.



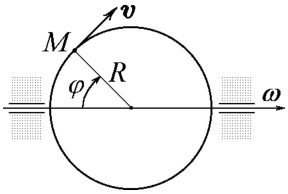
1.32. Шар радиуса R вращается вокруг неподвижного диаметра AB с постоянной угловой скоростью ω. Точка M движется равномерно по его меридиану со скоростью v. Найти величину абсолютного ускорения точки M в зависимости от широты φ.



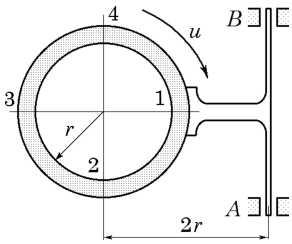
1.33. Прямоугольник $ABCD$, в котором $DA = CB = l$, вращается вокруг стороны CD с постоянной угловой скоростью $\omega = \frac{\pi}{2}$. Вдоль стороны AB движется точка M по закону $\xi = c \sin \frac{\pi t}{2}$. Определить величину абсолютного ускорения точки в момент времени $t = 1$.



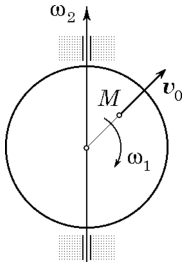
1.34. Диск радиуса R вращается вокруг своего неподвижного диаметра с постоянной угловой скоростью ω. По ободу диска с постоянной по величине скоростью v движется точка M. Найти абсолютное ускорение точки M как функцию угла φ, образованного радиус-вектором точки с осью вращения диска.



1.35. Полое кольцо радиуса r вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси AB, расположенной в плоскости кольца на расстоянии $2r$ от его центра. Кольцо заполнено жидкостью, движущейся в нём с постоянной относительной скоростью u. Определить величины абсолютных ускорений частиц жидкости, расположенных в точках 1, 2, 3 и 4.

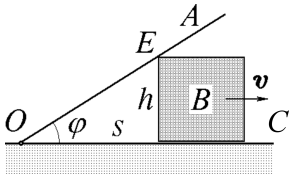


1.36. Диск вращается вокруг своего неподвижного диаметра с постоянной угловой скоростью ω_2. Подвижный радиус вращается в плоскости диска с постоянной угловой скоростью ω_1. По подвижному радиусу диска от центра к краю движется точка M с постоянной скоростью v_0. Найти абсолютную скорость точки M, считая, что в начальный момент она находилась в центре диска, а подвижный радиус был направлен по оси вращения диска.

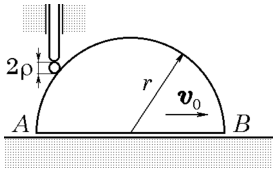


1.37. Диск вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр O. Точка C движется по диску с постоянной по величине относительной скоростью v, описывая при этом заданную кривую, обращённую выпуклостью к точке O. Найти абсолютные скорость и ускорение точки C в тот момент времени, когда $OC = r$, радиус кривизны относительной траектории в этой точке равен ρ, а нормаль образует с OC угол φ.

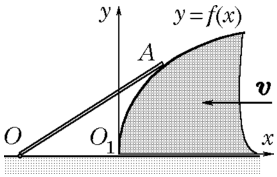
1.38. Стержень OA, который может свободно вращаться вокруг неподвижной точки O, расположенной на неподвижной прямой OC, опирается на брусок B, имеющий высоту h и движущийся поступательно со скоростью v вдоль прямой OC. Определить величину абсолютной скорости точки E стержня, находящейся в соприкосновении с углом бруска, в тот момент, когда расстояние от края бруска до точки O равно s.



1.39. Стержень с роликом опирается на полудиск, движущийся поступательно с постоянной скоростью v_0 вдоль своего диаметра AB. Стержень перпендикулярен диаметру AB, ролик имеет радиус ρ. Найти скорость и ускорение стержня. В начальный момент стержень опирается на верхнюю точку полудиска.



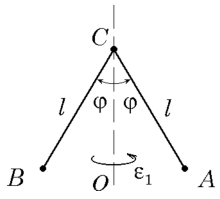
1.40. В неподвижной плоскости Ox_1y_1 вокруг неподвижной точки O может свободно вращаться стержень OA длины l. Другой его конец A скользит по жёсткому профилю, который движется с постоянной скоростью v вдоль оси Ox. В системе координат O_1xy, связанной с профилем, определить такую его форму $y = f(x)$, при которой скорость точки A стержня была бы постоянной по величине и равнялась ωl.



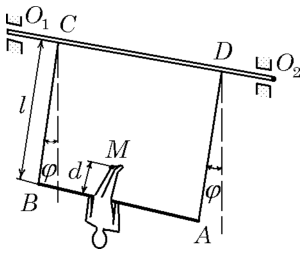
1.41. По железнодорожному пути, проложенному вдоль некоторой параллели северной широты, движется тепловоз со скоростью $v = 20$ м/с с запада на восток. Определить величину кориолисова ускорения тепловоза. Угловую скорость суточного вращения Земли считать равной $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60^2}$ с$^{-1}$.

1.42. По реке Неве с востока на запад по параллели 60° северной широты со скоростью $v = 1{,}11$ м/с плывёт плот. Определить переносное, относительное и кориолисово ускорения плота. Радиус Земли считать равным $6{,}4 \cdot 10^6$ м.

1.43. Точки A и B находятся на расстоянии l от точки C и расположены в плоскости, вращающейся вокруг неподвижной оси OC с угловым ускорением ε_1. В этой плоскости точки A и B движутся так, что выполняется соотношение $\varphi = \frac{\varepsilon_2 t^2}{2}$. Определить абсолютные скорости и ускорения точек A и B как функции времени. Известно, что в начальный момент система покоилась. Ускорения ε_1 и ε_2 считать известными постоянными.



1.44. Воздушная трапеция $ABCD$ с боковыми сторонами $BC = AD = l$ совершает качания вокруг горизонтальной оси O_1O_2 по закону $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$. Гимнаст, выполняющий упражнение на перекладине AB, вращается вокруг неё с постоянной угловой скоростью ω относительно плоскости трапеции. Определить абсолютное ускорение точки M, расположенной на подошве гимнаста и находящейся на расстоянии d от перекладины AB в момент времени $t = \frac{\pi}{\omega}$.



1.45. Найти условия, при которых в сложном движении точки справедливы соотношения $\dot{\mathbf{v}}_{\text{отн.}} = \mathbf{a}_{\text{отн.}}$, $\dot{\mathbf{v}}_{\text{пер.}} = \mathbf{a}_{\text{пер.}}$.

1.46. Показать, что в сложном движении точки всегда выполнено равенство $\dot{\mathbf{v}}_{\text{отн.}} - \dot{\mathbf{v}}_{\text{пер.}} = \mathbf{a}_{\text{отн.}} - \mathbf{a}_{\text{пер.}}$.

1.47. Восточная, северная и радиальная проекции скорости некоторой точки M относительно Земли соответственно равны v_E, v_N, v_R. Определить проекции абсолютного ускорения точки M, движущейся вблизи Земли, на оси сопровождающего трёхгранника $Mxyz$, где ось Mx направлена на восток, ось My — на север, ось Mz — по радиусу Земли в данном месте. Высоту h точки над поверхностью Земли и широту места φ в данный момент времени считать известными. Также известны радиус R и угловая скорость ω суточного вращения Земли.

1.3. Кинематика абсолютно твёрдого тела

Абсолютно твёрдым телом в классической механике называется совокупность точек, расстояния между которыми при движении тела не меняются. Скорости и ускорения различных точек тела, совершающего произвольное движение, различны, поэтому выражения «скорость тела» и «ускорение тела» в общем случае лишены смысла.

Характеризуя движение абсолютно твёрдого тела, говорят о поле (или распределении) скоростей, которое задаётся *формулой Эйлера*

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AM}.$$

Здесь $\mathbf{v}_M$, $\mathbf{v}_A$ — скорости *любых* двух точек M и A тела, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела относительно неподвижной системы отсчёта. Если ввести подвижную систему отсчёта с началом в точке A и осями, параллельными осям неподвижной системы, то формулу Эйлера можно интерпретировать как теорему сложения скоростей для точки M — её абсолютная скорость $\mathbf{v}_M$ равна векторной сумме переносной $\mathbf{v}_A$ и относительной $\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AM}$ скоростей. В смысле этой интерпретации точку A иногда называют *полюсом*.

Ускорение $\mathbf{a}_M$ произвольной точки M тела определяется *формулой Ривальса*

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{AM} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AM}),$$

где $\mathbf{a}_A$ — ускорение точки A тела; $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ — угловое ускорение тела. Вектор $\boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{AM}$ называется *вращательным ускорением* точки M, а вектор $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AM})$ — её *осестремительным ускорением*.

Важнейшие частные случаи движения абсолютно твёрдого тела

Мгновенно-поступательное и поступательное движения. Если в некоторый момент времени t_0 угловая скорость тела равна нулю, из формулы Эйлера следует, что в этот момент скорости всех точек тела одинаковы. Такое движение называется *мгновенно-поступательным*. Ускорения точек тела при мгновенно-поступательном движении не обязательно одинаковы, так как вектор углового ускорения может быть отличен от нуля в этот момент времени.

Если же угловая скорость равна нулю на интервале $[t_0; t_1]$, то скорости и ускорения всех точек тела на этом интервале времени одинаковы и равны соответственно скорости и ускорению полюса, поскольку теперь и вектор углового ускорения обращается в нуль. В этом случае движение тела называют *поступательным*. Траектории точек тела при поступательном движении могут быть произвольными.

Движение с одной неподвижной точкой (сферическое движение). Если одна из точек твёрдого тела неподвижна, то её скорость и ускорение тождественно равны нулю. Выбрав эту точку в качестве полюса и совместив с ней начало неподвижной системы координат, получим, что формулы Эйлера и Ривальса приобретают вид

$$\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AM}, \qquad \mathbf{a}_M = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{AM} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AM}).$$

Скорости точек тела, лежащих на прямой, проходящей через неподвижную точку и параллельной вектору $\boldsymbol{\omega}$, равны нулю, поэтому эта прямая называется *мгновенной осью вращения*.

Геометрическое место мгновенных осей вращения в пространстве, связанном с телом, называется *подвижным аксоидом*. Геометрическое место мгновенных осей вращения в неподвижном пространстве называется *неподвижным аксоидом*.

Траектория любой точки тела в рассматриваемом случае лежит на сфере соответствующего радиуса с центром в неподвижной точке, поэтому одно из названий этого движения — *сферическое*.

Плоскопараллельное движение. Если при движении абсолютно твёрдого тела расстояния от всех его точек до некоторой неподвижной плоскости P остаются постоянными, то говорят, что тело совершает плоскопараллельное движение. В этом случае изучение движения тела можно заменить изучением движения плоской фигуры, получающейся при сечении тела неподвижной плоскостью, параллельной плоскости P.

Вектор угловой скорости при плоскопараллельном движении всегда перпендикулярен плоскости P; если $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$, то существует точка C плоской фигуры (или точка пространства, жёстко связанного с плоской фигурой), скорость которой в данный момент равна нулю. Эта точка называется *мгновенным центром скоростей*. Выбирая мгновенный центр скоростей в качестве полюса, можно представить поле скоростей в виде

$$\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CM},$$

т. е. скорости точек фигуры распределены так, как они были бы распределены, если бы фигура вращалась вокруг неподвижной точки C. С течением времени мгновенный центр скоростей может менять своё положение как по отношению к телу, так и по отношению к неподвижной плоскости.

Геометрическое место положений мгновенного центра скоростей на неподвижной плоскости называется *неподвижной центроидой,* а на плоскости, жёстко связанной с телом, — *подвижной центроидой*.

Если $\varepsilon^2 + \omega^4 \neq 0$, то существует точка K фигуры (или точка пространства, жёстко связанного с плоской фигурой), ускорение которой в данный момент равно нулю. Эта точка называется *мгновенным цен-*

тром ускорений. Выбрав точку K в качестве полюса, получим

$$\mathbf{a}_M = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{KM} - \omega^2 \overrightarrow{KM},$$

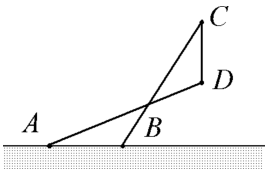
т. е. в этом случае ускорения точек плоской фигуры распределены так, как они были бы распределены, если бы эта фигура вращалась вокруг неподвижной точки K с заданными угловой скоростью и угловым ускорением.

Мгновенный центр скоростей и мгновенный центр ускорений, вообще говоря, не совпадают.

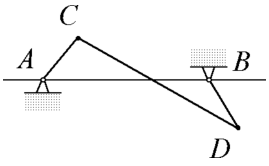
Вращение вокруг неподвижной оси. Это движение имеет место, если остаются неподвижными две точки тела. Оно является одновременно сферическим и плоскопараллельным движением, поэтому обладает особенностями обоих движений.

Рассматривая вращение вокруг неподвижной оси как плоскопараллельное движение, интересно отметить, что в этом случае точка, лежащая на оси вращения, является и центром скоростей и центром ускорений, поскольку её скорость и ускорение тождественно равны нулю.

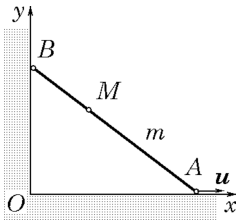
1.48. Шарнирный плоский механизм состоит из четырёх стержней $AD = BC = 2b$, $AB = CD = 2c < 2b$, связанных шарнирами в точках A, B, C, D, причём стержень AB неподвижен (антипараллелограмм, поставленный на малое звено). Найти центроиды стержня CD.



1.49. Найти центроиды стержня CD антипараллелограмма $ABCD$, поставленного на звено AB, если $AB = CD > AC = BD = 2b$.

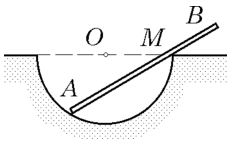


1.50. Стержень AB длины l скользит концами по сторонам прямого угла xOy. Найти центроиды стержня. Найти также траекторию, скорость и ускорение (как функции угла $\varphi = \angle OAB$) его точки M, находящейся на расстоянии m от конца A, считая, что скорость конца A постоянна и равна u.

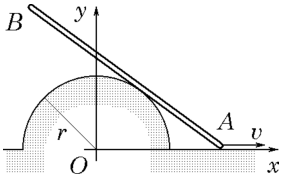


1.51. Жёсткий угол $AOB = \varphi$ движется в своей плоскости так, что сторона OA всегда проходит через неподвижную точку M, а другая сторона — через неподвижную точку N. Найти центроиды движущегося угла.

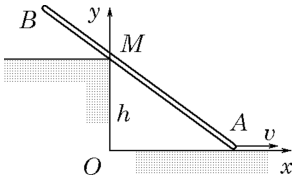
1.52. Стержень AB длины l движется в неподвижной плоскости так, что он всегда проходит через точку M неподвижной полуокружности радиуса r, $r \leqslant \frac{l}{2}$, а его конец A скользит по этой полуокружности. Найти траектории точек стержня, а также его центроиды.



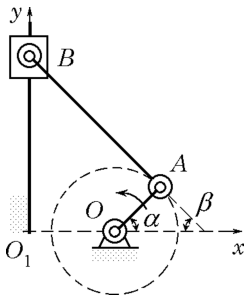
1.53. Стержень AB движется в неподвижной плоскости Oxy так, что его конец A скользит по оси Ox со скоростью v. Во всё время движения стержень касается окружности радиуса r с центром в точке O. Найти скорость изменения угла OAB и центроиды стержня.



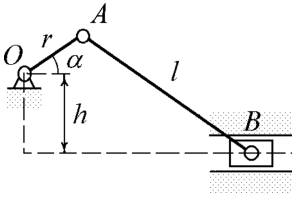
1.54. Стержень AB движется в неподвижной плоскости Oxy так, что его конец A скользит по оси Ox со скоростью v. Во всё время движения стержень проходит через точку $M(0, h)$. Найти центроиды стержня и его мгновенную угловую скорость.



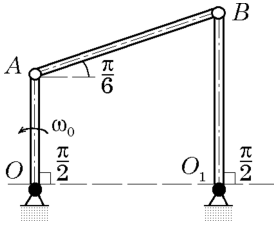
1.55. Стержень OA длины 0,2 м равномерно вращается вокруг точки O так, что $\dot{\alpha} = 10\ \text{с}^{-1}$, и приводит в движение стержень AB длины 1 м; тело B движется вдоль оси O_1y. Найти мгновенные угловую скорость и угловое ускорение стержня AB, а также ускорение тела B в момент времени, когда стержни OA и AB взаимно перпендикулярны и образуют с осью O_1x углы $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$.



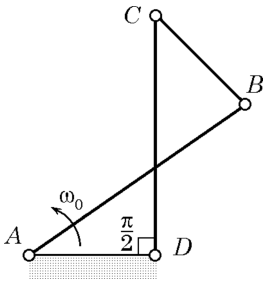
1.56. Плоский механизм состоит из двух шарнирно соединённых стержней OA длины r и AB длины l, а также тела B. Стержень OA вращается вокруг неподвижной точки O так, что $\dot{\alpha} = \omega_0$, где $\omega_0 = \text{const}$. Тело B скользит вдоль неподвижной прямой CD, не проходящей через точку O. Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня AB, а также скорость и ускорение тела B в тех положениях, когда $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$.



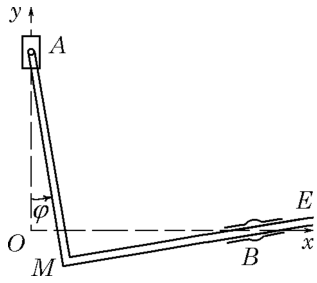
1.57. Стержень OA шарнирного четырёхзвенника $OABO_1$ вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. Определить угловую скорость, угловое ускорение стержня AB, а также ускорение точки B в положении, указанном на рисунке, если $AB = 2OA = 2b$.



1.58. Антипараллелограмм составлен из двух стержней AB и CD одинаковой длины $2a$ и шарнирно соединённого с ним стержня BC длины $2b$. Расстояние между неподвижными осями A и D равно $2b$. Стержень AB вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. Найти угловую скорость и угловое ускорение стержня BC в момент, когда угол ADC равен $\frac{\pi}{2}$.

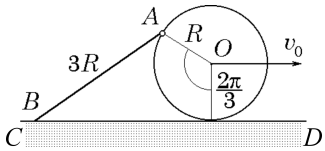


1.59. Жёсткий прямой угол AME движется так, что точка A остаётся всё время на неподвижной прямой Oy, а сторона ME проходит через неподвижную точку B, лежащую на оси Ox. Известно, что скорость v_A точки A постоянна и $AM = OB = d$. Определить ускорение точки M как функцию угла φ.

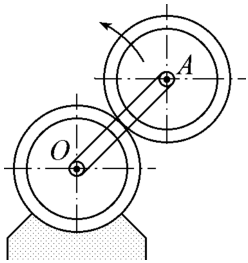


1.60. Колесо радиуса $R = 0{,}5$ м катится без проскальзывания по прямолинейному рельсу. В данный момент центр колеса O имеет скорость $v_0 = 0{,}5$ м/с и ускорение $a_0 = -0{,}5$ м/с^2. Найти: 1) положение точки, совпадающей с мгновенным центром K ускорений колеса; 2) ускорение точки колеса, совпадающей с мгновенным центром C скоростей; 3) ускорение точки M и 4) радиус кривизны её траектории, если $OM = MC = 0{,}5R$.

1.61. Колесо радиуса R катится без проскальзывания по прямой CD. Центр O колеса движется с постоянной скоростью v_0. В точке A с колесом шарнирно соединён стержень AB длины $3R$. Конец B стержня скользит по CD. Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня AB, а также линейную скорость и линейное ускорение его точки B в тот момент времени, когда стержень находится в положении, указанном на рисунке.



1.62. Шестерня радиуса R катится без проскальзывания по неподвижной шестерне такого же радиуса и приводится в движение стержнем OA, концы которого шарнирно закреплены в центрах обеих шестерён. Стержень вращается с угловым ускорением ε_0 и имеет в некоторый момент времени угловую скорость ω_0. Найти для этого момента времени: 1) ускорение той точки M подвижной шестерни, которая в данный момент совпадает с её мгновенным центром скоростей; 2) ускорение диаметрально противоположной точки N

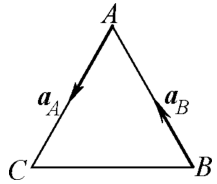


подвижной шестерни.

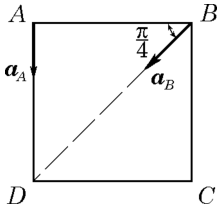
1.63. Диск радиуса r катится без проскальзывания по внутренней стороне неподвижной окружности радиуса $2r$. Известно, что скорость центра диска постоянна по величине и равна v_0. Найти скорость мгновенного центра ускорений диска, а также ускорение его мгновенного центра скоростей.

1.64. Ускорения концов стержня AB длины 0,1 м, совершающего плоское движение, направлены вдоль стержня навстречу друг другу, причём $a_A = 0{,}1$ м/с^2, $a_B = 0{,}2$ м/с^2. Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня.

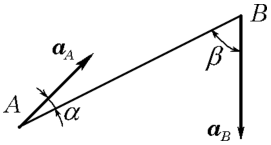
1.65. В плоскости рисунка движется равносторонний треугольник ABC. Ускорения вершин A и B в данный момент времени равны a и направлены по сторонам треугольника. Определить ускорение третьей вершины C треугольника.



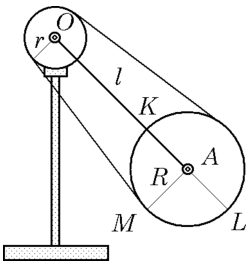
1.66. Квадрат $ABCD$ со стороной 2 м совершает плоское движение. В данный момент величины ускорений его вершин A и B равны $a_A = 2$ м/с^2 и $a_B = 4\sqrt{2}$ м/с^2 соответственно и направлены как указано на рисунке. Найти мгновенные угловую скорость и угловое ускорение квадрата и ускорение точки C.



1.67. Стержень AB совершает плоское движение. Найти величину ускорения середины стержня, если ускорения его концов равны $a_A = 10$ м/с^2 и $a_B = 20$ м/с^2 и образуют с прямой AB углы $\alpha = \frac{\pi}{18}$ и $\beta = \frac{7\pi}{18}$ соответственно.

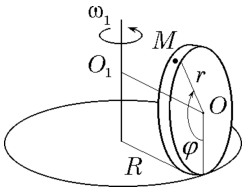


1.68. Стержень OA длины l вращается с угловым ускорением ε_0 вокруг оси O неподвижного диска радиуса r и несёт на конце A ось другого диска радиуса R, $R > r$. Диски охвачены ремнём, который не проскальзывает по краям дисков. Найти мгновенные угловую скорость и угловое ускорение подвижного диска, а также ускорения его точек K, L и M ($KL \perp AM$) в тот момент времени, когда угловая скорость стержня равна ω_0. Рассмотреть случай $r = R$.

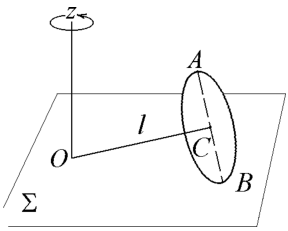


1.69. Велосипедист движется по круговой дорожке трека радиуса R. Найти угловую угловую скорость и угловое ускорение колеса велосипеда, если скорость его центра равна v и постоянна по времени. Колесо радиуса r катится без проскальзывания и его ось параллельна плоскости трека.

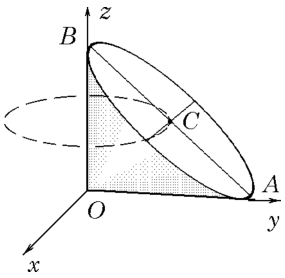
1.70. Диск радиуса r катится без проскальзывания по плоскости, сохраняя свою плоскость ортогональной этой плоскости и отрезку O_1O. Центр O диска описывает окружность радиуса R с постоянной скоростью v. Найти осестремительное и вращательное ускорения по отношению к полюсу O_1 точки M, положение которой на ободе диска определяется углом φ, показанным на рисунке.



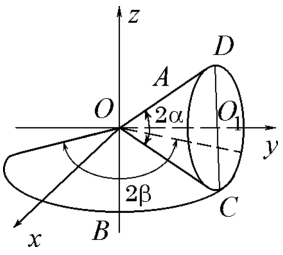
1.71. Диск радиуса r с центром в точке C жёстко насажен на стержень OC длины l, перпендикулярный плоскости диска. Диск катится по неподвижной плоскости Σ без проскальзывания, а конец стержня O остаётся неподвижным в плоскости Σ. Плоскость zOC вращается вокруг прямой Oz, перпендикулярной к плоскости Σ, с угловым ускорением ε_0 и в данный момент времени имеет угловую скорость ω_0. Найти мгновенные угловую скорость и угловое ускорение диска, а также ускорения точек A и B диска, показанных на рисунке.



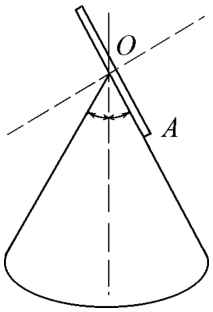
1.72. Конус, вершина O которого неподвижна, катится по плоскости Oxy без проскальзывания. Высота конуса равна h, а угол AOB при вершине прямой. Центр C основания конуса движется с постоянной скоростью и возвращается в первоначальное положение через каждые T с. Определить скорость конца B диаметра AB, мгновенные угловую скорость и угловое ускорение конуса, а также ускорения точек A и B конуса.



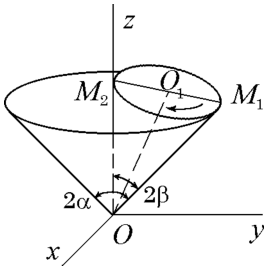
1.73. Конус A высоты h и углом 2α при вершине катится без проскальзывания по неподвижному конусу B с углом при вершине 2β, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ так, что вершины конусов совпадают. Точка O_1 — центр основания конуса A — движется равномерно, делая n оборотов в минуту. Найти мгновенные угловую скорость и угловое ускорение конуса A и ускорения его точек C и D.



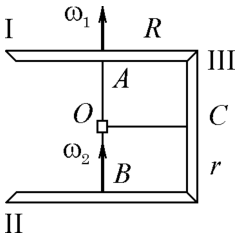
1.74. Диск OA радиуса R, вращаясь вокруг неподвижной точки O, обкатывает без проскальзывания неподвижный конус с углом при вершине, равным 2α. Найти мгновенную угловую скорость диска, если ускорение точки A диска в данный момент равно a.



1.75. Конус с углом раствора 2β и высотой h катится без проскальзывания по внутренней стороне поверхности неподвижного конуса с углом раствора 2α, $\alpha = 2\beta$. Точка O_1 — центр основания подвижного конуса, описывает окружность за 0,5 с. Найти мгновенные угловую скорость и угловое ускорение подвижного конуса, а также скорости и ускорения его точек M_1 и M_2.

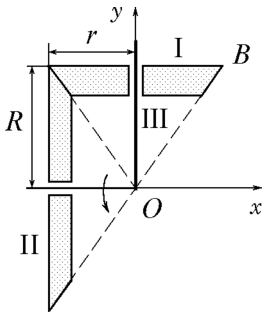


1.76. Шестерни I и II радиуса R дифференциального механизма вращаются вокруг неподвижной оси AB со скоростями ω_1 и ω_2 соответственно. Определить мгновенные угловую скорость шестерни III радиуса r, ось OC которой перпендикулярна AB и может свободно вращаться вокруг оси AB. Проскальзывание между шестернями отсутствует.

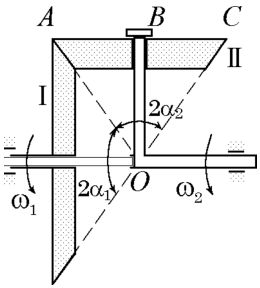


1.77. Найти уравнения мгновенной оси вращения и величину угловой скорости тела, если известно, что в системе координат, связанной с телом, проекции абсолютной скорости $\mathbf{v}_1$ точки $M_1(0,0,2)$ равны $(1,2,0)$, а направляющие косинусы вектора скорости $\mathbf{v}_2$ точки $M_2(0,1,2)$ равны $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

1.78. Шестерня I радиуса r, находящаяся в зацеплении с неподвижной шестернёй II радиуса $R = 2r$, приводится в движение подвижным валом III. В начальный момент времени угловая скорость вала равна ω_0 и далее он вращается равноускоренно с угловым ускорением ε_0. Каковы будут через время t угловая скорость и угловое ускорение шестерни I, а также скорость точки B этой шестерни?

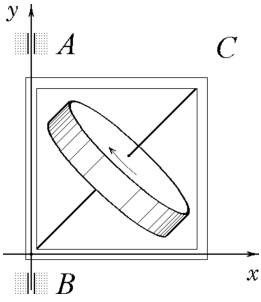


1.79. Коническая шестерня I радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω_1. Шестерня II приводится в движение с помощью вала OB, имеющего постоянную угловую скорость $\omega_2 = \frac{3}{2}\omega_1$ и то же направление вращения, что и шестерня I. Определить мгновенную угловую скорость и угловое ускорение шестерни II, а также скорость и ускорение её точки C, диаметрально противоположной точке касания A. Известно, что угол $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$, угол $\alpha_2 = \frac{\pi}{6}$, кроме того, оси шестерён пересекаются в точке O.

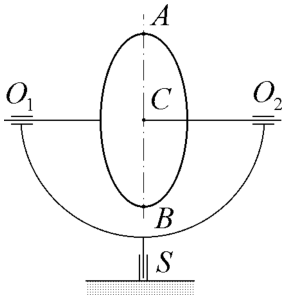


1.80. Ось симметрии волчка Oz описывает поверхность неподвижного кругового конуса с осью OS и углом раствора 2α. Плоскость SOz за 1 минуту совершает n оборотов вокруг неподвижной оси OS. Угловая скорость волчка относительно плоскости SOz постоянна и равна ω_1. Найти мгновенную угловую скорость волчка и его мгновенное угловое ускорение.

1.81. Квадратная рамка со стороной 10 см вращается вокруг неподвижной оси AB с постоянной угловой скоростью ω_1. Диск радиуса $r = \frac{5\sqrt{2}}{3}$ см, плоскость которого перпендикулярна диагонали BC рамки, а центр находится в её середине, вращается относительно рамки с угловой скоростью $\omega_2 = \sqrt{2}\omega_1$. Найти мгновенную угловую скорость и мгновенное угловое ускорение диска, а также ускорения точек K и L обода диска, лежащих в данный момент в плоскости рамки.



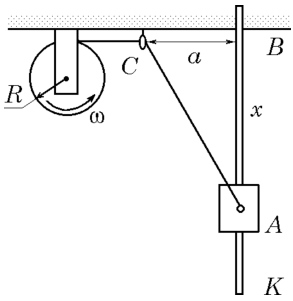
1.82. Диск радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 относительно плоскости рамки вокруг оси O_1O_2, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр C. В свою очередь, ось O_1O_2 закреплена в рамке O_1SO_2, вращающейся с угловой скоростью ω_2 вокруг неподвижной оси CS ($O_1O_2 \perp CS$) в неподвижном пространстве. Найти мгновенную угловую скорость и мгновенное угловое ускорение диска, а также величины скоростей и ускорений точек A и B диска, лежащих на концах диаметра диска, имеющего в данный момент направление, совпадающее с направлением оси CS.



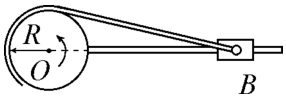
1.83. Шар радиуса R катится по плоскости без проскальзывания. Используя в качестве координат декартовы координаты центра шара x_C, y_C, z_C и углы Эйлера φ, ψ и θ, записать уравнения, выражающие отсутствие проскальзывания.

1.4. Смешанные задачи

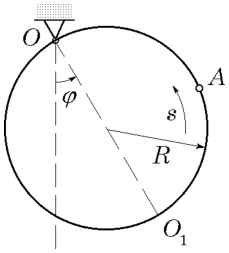
1.84. Ползун A приводится в движение вдоль стержня BK при помощи шнура AC, продетого через неподвижное кольцо C и наматывающегося на колесо радиуса R, которое вращается с постоянной угловой скоростью ω. Известно, что $BC = a$. Найти скорость ползуна как функцию расстояния $AB = x$.



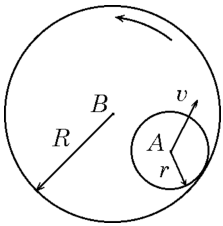
1.85. Ползун B приводится в движение посредством нити, наматывающейся на колесо радиуса R, которое вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω. Найти скорость ползуна как функцию расстояния $OB = x$.



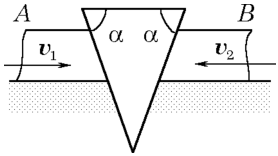
1.86. Круговое кольцо, точка O которого неподвижна, совершает колебания в своей плоскости по закону $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$. Радиус кольца равен R. Точка A движется по кольцу так, что $s = at^2$, где s — длина дуги O_1A. Найти скорость и ускорение точки A в момент времени $t = \frac{\pi}{\omega}$.



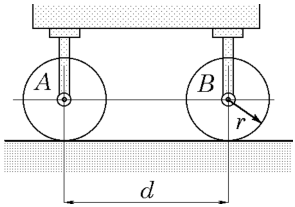
1.87. Полый цилиндр B радиуса R вращается вокруг своей неподвижной оси с угловой скоростью ω. По его внутренней поверхности катится без проскальзывания цилиндр A радиуса r, $r < R$. Абсолютная скорость оси цилиндра A равна v. Найти абсолютную угловую скорость цилиндра A.



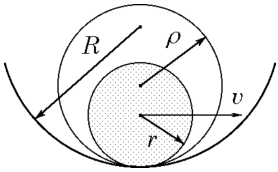
1.88. Равнобокий клин с углами α при основании помещён между двумя брусками A и B, которые движутся прямолинейно по горизонтальной плоскости со скоростями v_1 и v_2. Найти движение клина.



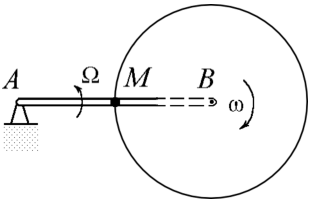
1.89. Колёса A и B вагона, движущегося со скоростью v, катятся по прямолинейному рельсу без проскальзывания. Радиусы колёс равны r, расстояние между осями d. Определить скорость центра колеса A относительно системы координат, неизменно связанной с колесом B.



1.90. Диск радиуса r катится внутри окружности радиуса R, прижимая тонкий обруч радиуса ρ, $r < \rho < R$, как показано на рисунке. Проскальзывание при движении отсутствует. Найти угловую скорость обруча, если скорость центра диска равна v.

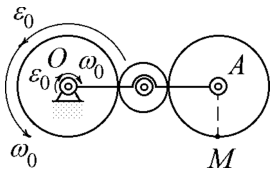


1.91. Стержень AB длины $2b$ («водило») вращается в неподвижной плоскости вокруг своего конца A с постоянной угловой скоростью Ω против часовой стрелки. На конце B водила насажено свободно колесо радиуса b, вращающееся в той же плоскости, но в противоположную сторону с постоянной угловой скоростью ω относительно водила. Подобрать величину угловой скорости ω так, чтобы абсолютное ускорение точки M колеса, лежащей в данный момент над водилом, было равно нулю.

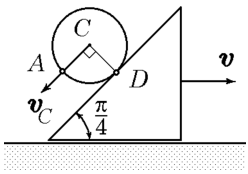


1.92. Стержень AB длины $2b$ («водило») вращается в неподвижной плоскости вокруг своего конца A с постоянной угловой скоростью Ω против часовой стрелки. На конце B водила насажено свободно колесо радиуса b, вращающееся в той же плоскости, но в противоположную сторону с постоянной угловой скоростью ω относительно водила (см. рис. к задаче 1.91). Найти абсолютное ускорение некоторой точки, движущейся с постоянной относительной скоростью v по окружности колеса против часовой стрелки, в тот момент, когда эта точка находится над водилом (в точке M колеса). Исследовать полученную формулу для случаев $v = \omega b$ и $v = 0$.

1.93. В эпициклической передаче ведущая шестерня радиуса R вращается против часовой стрелки с угловым ускорением ε_0, кривошип длины $3R$ вращается вокруг её оси по часовой стрелке с тем же угловым ускорением. Найти мгновенную угловую скорость и мгновенный центр скоростей ведомой шестерни радиуса R, а также скорость и ускорение её точки M, лежащей на конце диаметра, перпендикулярного в момент, когда угловые скорости ведущей шестерни и кривошипа равны ω_0 и противоположно направлены.

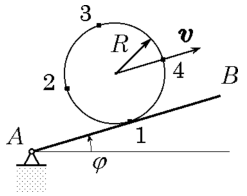


1.94. Треугольная призма, наклонная плоскость которой образует угол $\frac{\pi}{4}$ с горизонтом, скользит направо по горизонтальной плоскости со скоростью $v = 2t$ см/с. По наклонной грани призмы скатывается без проскальзы-

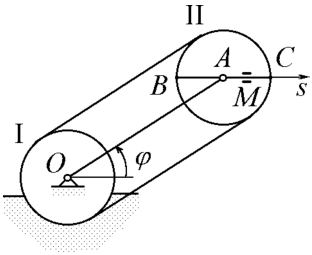


вания круглый цилиндр радиуса $r = 8$ см. Величина скорости его центра масс C относительно призмы равна $v_C = 4t$ см/с. Определить величину абсолютного ускорения точки A цилиндра, в которой вектор $\mathbf{v}_C$ пересекает его поверхность, если в момент времени $t = 1$ с угол ACD прямой.

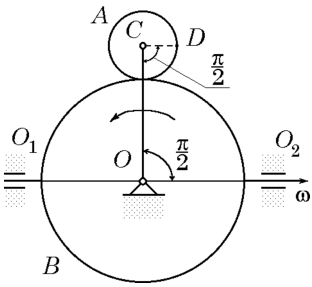
1.95. Прямая AB вращается в плоскости вокруг неподвижной точки A так, что $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$. Диск радиуса R катится без проскальзывания по этой прямой так, что относительная скорость его центра постоянна и равна v. В начальный момент точка касания диска с прямой совпадала с точкой A. Найти скорости и ускорения точек 1, 2, 3 и 4 диска как функции времени.



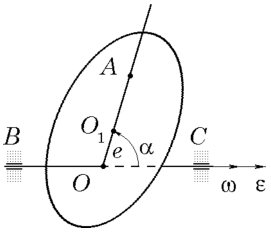
1.96. Неподвижная шестерня I соединена цепью с подвижной шестернёй II того же радиуса. Шестерня II приводится в движение с помощью кривошипа OA длины 60 см. Кривошип OA вращается вокруг точки O против часовой стрелки по закону $\varphi = \frac{\pi}{6}t$ рад. Вдоль диаметра BC шестерни II движется ползун M, совершая колебания около центра A по закону $AM = 20\sin\frac{\pi}{2}t$ см. Определить величины абсолютной скорости и абсолютного ускорения ползуна M в моменты времени $t_1 = 0$ и $t_1 = 1$ с.



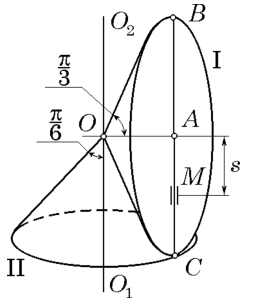
1.97. Шестерня A радиуса 10 см приводится в движение по шестерне B радиуса 20 см посредством стержня OC, который вращается с угловой скоростью $\omega_0 = t$ с$^{-1}$ вокруг своего конца O. Шестерня B, в свою очередь, вращается вокруг неподвижной оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ с$^{-1}$. На ободе шестерни A выбрали некоторую точку D, для которой в момент времени $t = 1$ с выполняется условие $\angle O_2OC = \angle OCD = \frac{\pi}{2}$. Определить величины абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки D.



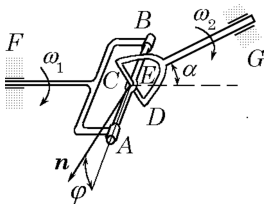
1.98. Диск укреплён на оси BC с эксцентриситетом $OO_1 = e$ под углом α и вращается вокруг этой оси с угловым ускорением ε, имея в данный момент угловую скорость ω. Точка A движется по диаметру диска, проходящему через точку O, по закону $O_1A = a\sin\omega t$. Найти скорость и ускорение точки A.



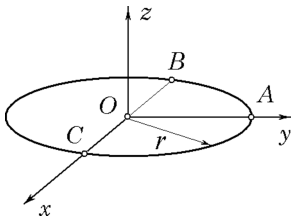
1.99. Круговой конус I с углом при вершине $\frac{2\pi}{3}$ катится без проскальзывания по неподвижному конусу II с углом при вершине $\frac{\pi}{3}$. При этом ось OA конуса I совершает вокруг неподвижной оси O_1O_2 один оборот в секунду. Вдоль диаметра $BC = 20$ см основания конуса I движется точка M, совершая колебания около центра A по закону $s = AM = 10\cos 2\pi t$ см. Определить величину абсолютного ускорения точки M в начальный момент времени $t = 0$, когда диаметр BC параллелен O_1O_2.



1.100. Для передачи вращения между двумя пересекающимися осями FE и EG можно использовать универсальный шарнир Кардана — Гука, состоящий из двух вилок ABF и CDG и крестовины $ABCD$, вращающейся вокруг неподвижной точки E, причём $AB \perp CD$. Угол α между осями вилок сохраняет постоянной значение. Найти отношение угловых скоростей вилок ABF и CGD (ω_1 и ω_2 соответственно), связанных крестовиной в следующих случаях: 1) когда плоскость вилки ABF горизонтальна, а плоскость вилки CDG вертикальна; 2) когда плоскость вилки ABF вертикальна, а плоскость вилки CDG ей перпендикулярна; 3) когда плоскость вилки ABF образует угол φ с нормалью к плоскости осей вилок.



1.101. В момент метания диска радиуса r три его точки A, B и C имеют скорости $v_A = 0$, $v_B = v$ и $v_C = \sqrt{2}v$, причём вектор скорости $\mathbf{v}_B$ лежит в плоскости диска. Найти угловую скорость диска и его мгновенную ось вращения.



1.102. Положения и скорости точек тела заданы в неподвижной декартовой системе координат. Точки $A(a, 0, 0)$, $B(a, a, a)$ и $C(0, 0, a)$ тела имеют в рассматриваемый момент скорости $\mathbf{v}_A(v, -v, 2v)$, $\mathbf{v}_B(v, 0, v)$ и $\mathbf{v}_C(v, 0, 2v)$. Найти кинематический винт тела.

1.103. Точка движется в плоскости со скоростью $\mathbf{v}(t)$ и ускорением $\mathbf{a}(t)$. Найти скорость и ускорение центра кривизны траектории точки.

1.104. В каждый момент времени t известны скорость $\mathbf{v}(t)$ движущейся в плоскости точки и радиус кривизны её траектории $\rho(t)$. Найти угловую скорость и угловое ускорение сопровождающего трёхгранника $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})$.

1.105. Доказать, что при любом движении твёрдого тела его угловая скорость связана с полем скоростей его точек равенством

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

1.106. Шар радиуса r катится по плоскости, касаясь боковой поверхности прямого кругового цилиндра радиуса R, образующая которого перпендикулярна плоскости. Проскальзывание между шаром и поверхностями отсутствует. Скорость и ускорение центра шара равны соответственно v и a. Найти векторы угловой скорости и углового ускорения шара. Рассмотреть случаи, когда: 1) шар катится внутри цилиндра, $r < R$; 2) шар катится снаружи цилиндра.

2. Динамика

2.1. Динамика точки

Задачи динамики можно разделить на два типа: по заданными связям и силам требуется найти движение точки, и, наоборот, по известным свойствам движения точки требуется найти силы, под действием которых происходит такое движение.

Если точка свободна, второй закон Ньютона даёт векторное уравнение движения точки

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{2.1}$$

где m — масса точки, $\mathbf{a}$ — вектор её ускорения относительно инерциальной системы отсчёта, $\mathbf{F}$ — сумма сил, под действием которых находится точка. Векторная величина $\mathbf{F}$ является функцией, вообще говоря, времени, положения точки и её скорости. Выбрав наиболее удобную для решений задачи систему координат, можно выписать скалярные уравнения движения. Если силы заданы, то решение задачи определения движения сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений. Если известно движение, то определение силы сводится к вычислению ускорения точки. Эту задачу приходится решать всегда, когда рассматривается движение несвободной точки и требуется находить реакции связей.

Движение точки называется *несвободным,* если на её положение или скорость налагаются какие-либо ограничения. Эти ограничения задаются аналитически уравнениями или неравенствами относительно кинематических характеристик движения точки и называются *уравнениями связей.*

Вводя в рассмотрение реакции связей (аксиома освобождаемости), уравнения движения несвободной точки можно записать в виде

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{R}$ — сумма реакций связей, приложенных к точке.

При решении задач динамики точки оказываются полезными три основные теоремы.

Теорема об изменении количества движения.

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \tag{2.3}$$

где вектор $\mathbf{Q} = m\mathbf{v}$ называют *количеством движения точки (импульсом)*.

Теорема об изменении момента количества движения.

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F} + \mathbf{R}), \tag{2.4}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки относительно некоторой неподвижной системы координат, а $\mathbf{K} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ — вектор момента количества движения (момент импульса, кинетический момент).

Теорема об изменении кинетической энергии.

$$dT = (\mathbf{F} + \mathbf{R})\, d\mathbf{r}, \tag{2.5}$$

где

$$T = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} -$$

кинетическая энергия точки, а $\mathbf{F}\, d\mathbf{r}$ — *элементарная работа* силы $\mathbf{F}$ на действительном перемещении точки.

Из уравнений (2.3), (2.4), (2.5) для некоторых частных случаев связей и характера сил, действующих на точку, могут быть получены первые интегралы уравнений движения. Их часто называют *законами сохранения*.

Закон сохранения количества движения. Если сумма действующих на точку сил равна нулю, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, и точка свободна, то

$$m\mathbf{v} = \mathbf{C}_1,$$

где $\mathbf{C}_1 = m\mathbf{v}_0$ — постоянный вектор.

Закон сохранения проекции количества движения. Если существует такое неподвижное направление Ox, что сумма проекций действующих сил и реакций связей на это направление постоянно равна нулю, то

$$mv_x = \text{const}\,.$$

Закон сохранения вектора момента количества движения. Если действующие силы являются центральными и связи отсутствуют, то

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{C}_2,$$

где $\mathbf{C}_2$ — постоянный вектор.

Закон сохранения момента количества движения относительно оси. Если существует неподвижная ось Oz, относительно которой сумма моментов сил $\mathbf{F}$ и $\mathbf{R}$ равна нулю, то сохраняется проекция момента количества движения на эту ось. В цилиндрических координатах этот интеграл имеет вид

$$mr^2\dot{\varphi} = \text{const}.$$

Геометрическим следствием этого соотношения являются *закон площадей.*

Интеграл энергии (закон сохранения механической энергии). Если связи таковы, что $\mathbf{R}\,d\mathbf{r} = 0$, и существует такая скалярная функция U, называемая *силовой функцией,* что $\mathbf{F}\,d\mathbf{r} = dU$, то

$$\frac{mv^2}{2} - U = h,$$

где h — некоторая постоянная. Функция $V = -U$ называется *потенциальной энергией.*

При изучении движения точки относительно неинерциальной системы отсчёта для составления уравнений движения можно использовать соотношение

$$m\mathbf{a}_{\text{отн.}} = \mathbf{F} + \mathbf{R} - m\mathbf{a}_{\text{пер.}} - m\mathbf{a}_{\text{кор.}}.$$

Слагаемые $-m\mathbf{a}_{\text{пер.}}$ и $-m\mathbf{a}_{\text{кор.}}$ называют *силами инерции* (переносной и кориолисовой соответственно).

Отметим особенность теоремы об изменении кинетической энергии в неинерциальной системе координат. Она имеет вид

$$d\frac{mv_{\text{отн.}}^2}{2} = (\mathbf{F} + \mathbf{R} - m\mathbf{a}_{\text{пер.}})\,d\mathbf{r}_{\text{отн.}},$$

поскольку работа силы инерции Кориолиса на относительном перемещении точки равна нулю.

Фазовая плоскость. Уравнение

$$\ddot{x} = F(x) \tag{2.6}$$

равносильно системе двух уравнений

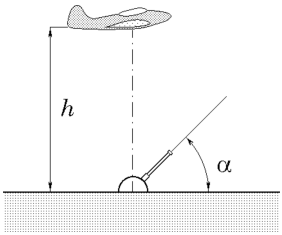
$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = F(x). \tag{2.7}$$

Плоскость (x, y) называют *фазовой плоскостью* уравнения (2.6). Правая часть (2.7) определяет на фазовой плоскости векторное поле. Это поле называется *векторным полем фазовой плоскости.* Интегральные кривые этого векторного поля называются *фазовыми траекториями.* Их совокупность определяет *фазовый портрет* механической системы.

2.1. Тело брошено с поверхности Земли вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Учитывая силу ньютоновского тяготения и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти, на какую максимальную высоту и в течение какого времени поднимется тело. Ускорение силы тяжести на поверхности Земли считать равным g, радиус Земли равен R.

2.2. Материальная точка массы m под действием силы, изменяющейся по закону $F = F_0 \cos \omega t$, где F_0 и ω — постоянные величины, совершает прямолинейное движение. В начальный момент точка имела скорость v_0. Найти закон движения точки.

2.3. Самолёт летит на высоте h над поверхностью Земли с горизонтальной скоростью v_1. Из орудия произведён выстрел по самолёту в тот момент, когда самолёт находился на одной вертикали с орудием. Найти: 1) какому условию должна удовлетворять начальная скорость снаряда для того, чтобы снаряд мог попасть в самолёт; 2) под каким углом к горизонту должен быть произведён выстрел, если начальная скорость снаряда равна v_0? Сопротивлением воздуха пренебречь, поле силы тяжести считать однородным.



2.4. Наибольшая горизонтальная дальность полёта снаряда равна L. Определить его горизонтальную дальность полёта и наибольшую высоту подъёма траектории при угле бросания $\frac{\pi}{6}$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.5. С крепостной башни производят два выстрела, причём начальные скорости снарядов оказываются равными по величине и лежат в одной и той же вертикальной плоскости. Эти начальные скорости направлены под углами α_1 и α_2 к горизонту. Оба снаряда попадают в одну и ту же точку на поверхности Земли. Определить высоту башни, предполагая, что поверхность Земли вокруг башни горизонтальна и что сопротивление воздуха отсутствует.

2.6. Найти геометрическое место фокусов всех параболических траекторий, соответствующих одной и той же начальной скорости v_0 и возможным углам бросания тяжёлой материальной точки.

2.7. Из орудия, находящегося в точке O, произвели выстрел под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Одновременно из точки A, находящейся на расстоянии l по горизонтали от точки O, произвели выстрел вертикально вверх. Определить, с какой начальной скоростью v_1 надо выпустить второй снаряд, чтобы он встретился с первым снарядом. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.8. Тяжёлую материальную точку бросают из начала координат под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Каковы должны быть значения α и v_0, чтобы траектория точки при прохождении через данную точку $M(x_1, y_1)$ составляла бы угол β с горизонтом?

2.9. Тело массы m брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости тела с коэффициентом μ. Определить скорость, с которой тело упадёт обратно на Землю.

2.10. Тело начинает падать из точки A без начальной скорости в среде, сила сопротивления которой $\mathbf{R} = -km\mathbf{v}$, где k — коэффициент пропорциональности, m — масса тела, $\mathbf{v}$ — его скорость. Одновременно с этим из точки B, находящейся на той же вертикали ниже точки A на расстоянии s, бросают другое тело с начальной скоростью v_0, направленной вертикально вверх. Найти, где и когда встретятся эти тела. При каком условии возможна встреча?

2.11. Стрелок стреляет из ружья, направленного горизонтально, в цель, находящуюся на продолжении линии ствола на расстоянии 40 м. Насколько ниже цели попадёт пуля, вылетающая со скоростью 400 м/с? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.12. В поле силы тяжести из некоторой точки одновременно бросают материальные точки с одинаковой по величине скоростью v_0

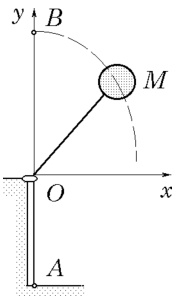
вдоль различных направлений, лежащих в одной плоскости. Доказать, что если сопротивление воздуха отсутствует, то в каждый момент времени все эти точки располагаются на одной окружности.

2.13. Точку массы m бросили с начальной скоростью v_0 под углом α_0 к горизонту. Сила сопротивления среды $\mathbf{R} = -kmg\mathbf{v}$, где k — постоянный коэффициент, а $\mathbf{v}$ — вектор скорости точки. Найти закон движения точки. Показать, что её траектория имеет вертикальную асимптоту. Найти предельную скорость точки.

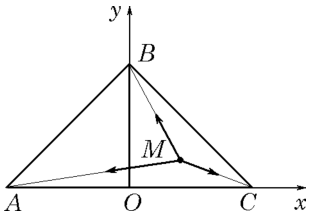
2.14. С какой минимальной скоростью следует бросить камень с поверхности Земли так, чтобы он перелетел через забор высоты h, находящийся на расстоянии l от точки бросания?

2.15. Камень, застрявший между покрышками заднего колеса грузового автомобиля, движущегося с постоянной скоростью v по горизонтальному участку шоссе, может вылететь в любой момент времени. Какую дистанцию должен выдерживать водитель едущего за грузовиком автомобиля, чтобы избежать удара летящего камня? Сколько времени после проезда грузовика должен подождать пешеход, чтобы при переходе шоссе вылетевший камень не попал в него? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.16. Упругая нить, описываемая законом Гука с коэффициентом упругости k, закреплена в точке A и проходит через неподвижное гладкое кольцо O; к её свободному концу прикреплён шарик M массы m. Длина нерастянутой нити $l = AO$. Вытянув нить вдоль прямой AB так, что длина её увеличилась вдвое, шарику сообщили скорость v_0 перпендикулярно прямой AB. Определить траекторию шарика, пренебрегая действием силы тяжести.



2.17. В вершине C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой $AC = 2a$, находится точка M массы m, имеющая нулевую начальную скорость. Каждая из трёх вершин треугольника притягивает точку M с силой $\mathbf{F} = -k^2m\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ есть вектор, соединяющий соответствующую вершину тре-



угольника с точкой M. Найти траекторию точки M и её скорость.

2.18. Частица массы m, несущая отрицательный электрический заряд e, попадает в однородное электрическое поле напряжённости $\mathbf{E}$ со скоростью $\mathbf{v}_0$, перпендикулярной направлению напряжённости поля. Определить траекторию дальнейшего движения частицы. Учесть, что на заряженную частицу в электрическом поле действует сила $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$, направленная в сторону, противоположную направлению вектора напряжённости поля $\mathbf{E}$. Действием силы тяжести пренебречь.

2.19. Частица массы m, несущая отрицательный электрический заряд e, попадает в однородное магнитное поле напряжённости $\mathbf{H}$ со скоростью $\mathbf{v}_0$, перпендикулярной направлению напряжённости поля. Определить траекторию дальнейшего движения частицы. Учесть, что на заряженную частицу в магнитном поле действует сила $\mathbf{F} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{H})$. Действием силы тяжести пренебречь.

Указание. Удобно записывать уравнения движения точки в проекциях на касательную и на главную нормаль к траектории.

2.20. В однородное электрическое поле переменной напряжённости $\mathbf{E} = \mathbf{A}\cos\omega t$, где $\mathbf{A}$ и k — постоянные, попала частица массы m, несущая отрицательный электрический заряд e, со скоростью $\mathbf{v}_0$, перпендикулярной направлению напряжённости поля. Определить траекторию частицы, учитывая, что в электрическом поле на неё действует сила $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$. Действием силы тяжести пренебречь.

2.21. Свободная материальная точка M массы m притягивается некоторой неподвижной точкой A. В результате точка M описывает окружность радиуса a, проходящую через точку A. Выразить величины силы притяжения и скорость точки как функции расстояния r от движущейся точки до точки A.

2.22. Свободная материальная точка движется под действием центральной силы, являющейся функцией расстояния r от этой точки до центра силы. Величина скорости точки изменяется обратно пропорционально этому расстоянию, т. е. $v = \frac{a}{r}$. Найти траекторию точки, если её секторная скорость равна $\frac{c}{2}$.

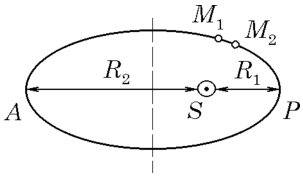
2.23. Частица массы m движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра O, изменяющейся по закону $\mathbf{F} = k^2 m\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки. В начальный момент частица находилась в точке $M_0(a, 0)$ и имела скорость $\mathbf{v}_0$, направленную параллельно оси Oy. Определить траекторию частицы.

2.24. Свободная материальная точка массы m описывает эллипс, большая полуось которого равна a, под действием силы ньютоновского притяжения $F = \frac{\mu m}{r^2}$, направленной к фокусу эллипса и зависящей от расстояния r от точки до фокуса. Доказать, что её скорость v изменяется по закону

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

2.25. Материальная точка P притягивается к неподвижной точке O массы M по закону всемирного тяготения. Под каким углом к прямой OP и с какой начальной скоростью нужно выпустить точку P, чтобы она описывала эллиптическую траекторию с параметрами $r_\pi = \frac{r_0}{2}$ и $r_\alpha = \frac{3r_0}{2}$, где π — перицентр, α — апоцентр, r_0 — начальное расстояние между точками?

2.26. Два астероида M_1 и M_2 движутся по одному и тому же эллипсу, в фокусе S которого находится Солнце. Расстояние между астероидами настолько мало, что дугу M_1M_2 эллипса можно считать отрезком прямой. Когда середина дуги M_1M_2 находилась в перигелии P, её длина равнялась a. Известно, что $SP = R_1$ и $SA = R_2$. Определить длину дуги M_1M_2, когда её середина будет проходить через афелий A.



2.27. Шарик массы m, привязанный к нерастяжимой нити, скользит по гладкой горизонтальной плоскости. Другой конец нити втягивают с постоянной скоростью a в отверстие, сделанное в плоскости. Известно, что в начальный момент нить была прямолинейна, шарик находился на расстоянии R от отверстия, а проекция начальной скорости шарика на перпендикуляр к направлению нити была равна v_0. Найти закон движения шарика и натяжение нити.

2.28. К шарику массы m привязана резинка, имеющая в нерастянутом состоянии длину l. Шарик нанизывают на прямолинейную проволоку, образующую с горизонтом угол $\alpha > \varphi$, где φ — угол трения шарика о проволоку. Свободный конец резинки прикрепляют к этой же проволоке на расстоянии l кверху от шарика и затем шарик отпускают. Найти закон движения шарика до его первой остановки. Учесть, что сила натяжения резинки пропорциональна её относительному удлинению с коэффициентом пропорциональности c.

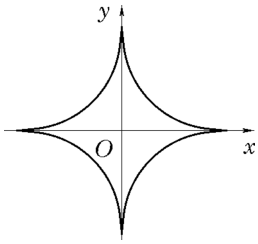
2.29. Кольцо массы M, надетое на неподвижную гладкую проволочную окружность радиуса r, плоскость которой вертикальна, может свободно перемещаться по этой окружности. В начальный момент кольцу сообщают скорость v_0. Найти скорость кольца в зависимости от его положения на окружности, задаваемого углом φ между радиусом, проходящем через кольцо, и вертикалью; $\varphi = 0$, когда кольцо находится в нижней точке окружности. Найти также реакцию связи.

2.30. Гладкий жёлоб, имеющий форму окружности радиуса r, установлен в вертикальной плоскости. В начальный момент в низшую точку жёлоба кладут шарик и сообщают ему горизонтальную скорость v_0. Какова должна быть скорость v_0, чтобы: 1) шарик пришёл в круговое движение; 2) шарик выскочил из жёлоба; 3) шарик совершал колебательное движение, не отрываясь от жёлоба?

2.31. Материальная точка спускается под действием силы тяжести по гладкой кривой, расположенной в вертикальной плоскости. Известно, что точка удаляется от горизонтали, проходящей через её начальное положение, с постоянной скоростью c. Найти эту кривую.

2.32. Материальная точка движется без трения под действием силы тяжести по нижней ветви астроиды, уравнение которой имеет вид

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (2r)^{\frac{2}{3}}.$$



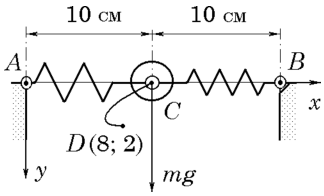
За какое время, выйдя с ничтожно малой скоростью из вершины $(2r, 0)$, точка достигнет вершины $(0, -2r)$?

2.33. Шарик массы m под действием силы тяжести скользит без трения по дуге эллипса, заданного уравнением

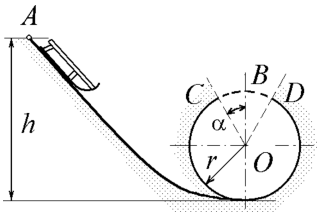
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Определить давление шарика на эллипс в точке $(0, -b)$, если шарик начинает движение без начальной скорости из точки $(a, 0)$. Ось y направлена вертикально вверх.

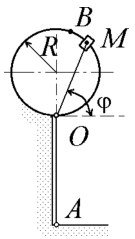
2.34. Две ненапряжённые пружины AC и BC жёсткостей 20 Н/м и 40 Н/м соответственно, расположенные по горизонтальной прямой Ax, прикреплены шарнирами к неподвижным точкам A и B, а в точке C — к гире массы 2 кг. Начальное расстояние $AC = BC = 10$ см. Гире C сообщена скорость $v_0 = 2$ м/с в вертикальной плоскости в таком направлении, что при последующем движении она проходит через точку $D(8, 2)$ в системе координат с началом в точке A и осями, показанными на рисунке. Определить скорость гири в момент прохождения точки D.



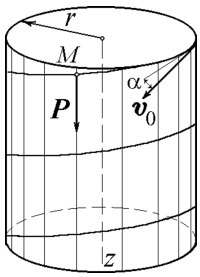
2.35. Путь, по которому движутся санки под действием силы тяжести, соскальзывая без трения из точки A, образуют разомкнутую петлю, представляющую собой окружность радиуса r, из которой вырезана дуга CD как показано на рисунке, $\angle BOC = \angle BOD = \alpha$. С какой высоты должны начинать движение санки, чтобы они прошли всю петлю, перелетев из точки D в точку C? При каком значении α эта высота будет наименьшей?



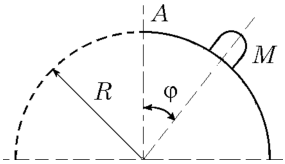
2.36. Гладкое кольцо M массы m скользит без трения под действием силы тяжести по дуге окружности радиуса R, расположенной в вертикальной плоскости. К кольцу привязана упругая нить MOA, проходящая через гладкое неподвижное кольцо O и закреплённая в точке A. Коэффициент упругости нити равен c и её натяжение равно нулю, когда кольцо M находится в точке O. Определить давление, производимое кольцом на окружность при движении из точки B, задаваемой углом φ_0, с нулевой начальной скоростью.



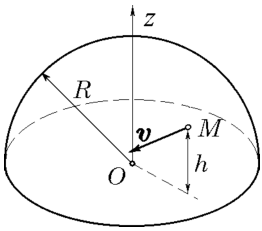
2.37. Точка M массы m движется под действием силы тяжести по внутренней поверхности гладкого кругового цилиндра радиуса r, ось которого вертикальна. Начальная скорость точки равнялась v_0 и составляла угол α с горизонтом. Определить давление точки на цилиндр.



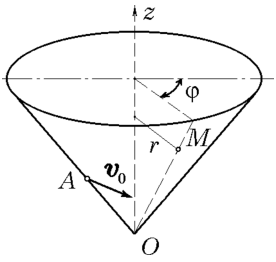
2.38. Камень M, лежащий на вершине A гладкого полусферического купола радиуса R, получив начальную горизонтальную скорость v_0, движется под действием силы тяжести. В каком месте камень покинет купол? При каких значениях v_0 камень сойдёт с купола в начальный момент?



2.39. Точка M массы m движется под действием силы тяжести, параллельной оси z, по гладкой поверхности полусферического купола радиуса R. В начальный момент точка находилась на высоте h_0 от основания купола и имела скорость v_0. Определить давление точки на купол, когда она будет на высоте h от основания купола.



2.40. На точку M массы $m = 1$ кг, движущуюся по гладкой поверхности кругового конуса с углом раствора $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, действует сила отталкивания от вершины O, пропорциональная расстоянию OM, $F = c \cdot OM$, где $c = 1$ Н/м. В начальный момент времени точка M находилась в точке A, расположенной на расстоянии 2 м от вершины O. Начальная скорость точки M была равна $v_0 = 2$ м/с и направлена параллельно основанию конуса. Найти закон движения точки M. Считать, что сила тяжести отсутствует.



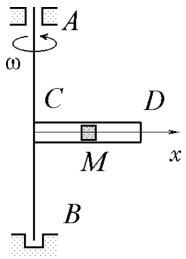
Указание. Положение точки M задать цилиндрическими координатами z, r и φ.

2.41. В условиях задачи 2.40, считая ось конуса направленной по вертикали вверх и учитывая силу тяжести, определить давление точки на поверхность конуса. Угол раствора конуса 2α.

2.42. В гладкой горизонтальной прямолинейной трубке, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через конец трубки O, находится шарик M массы m. В начальный момент расстояние OM было равно a, а скорость шарика относительно трубки равнялась нулю. Найти закон относительного движения шарика вдоль трубки и горизонтальную составляющую реакции трубки.

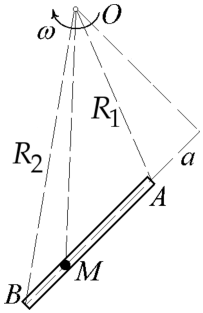
2.43. Гладкая трубка, осевая линия которой имеет форму некоторой плоской кривой, расположенной в горизонтальной плоскости, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через точку O плоскости. В трубке находится шарик M. В начальный момент расстояние OM было равно r_0, а скорость шарика относительно трубки была равна нулю. Показать, что относительная скорость шарика выражается формулой $v = \omega\sqrt{r^2 - r_0^2}$, где $r = OM$.

2.44. Горизонтальная трубка CD длины L равномерно вращается вокруг неподвижной вертикальной оси AB с угловой скоростью ω. Внутри трубки находится точка M. В начальный момент времени точка находилась на расстоянии x_0 от оси AB и её скорость относительно трубки равнялась нулю. Определить относительную скорость точки в момент вылета. Трением пренебречь.



2.45. В задаче 2.44 определить время движения точки в трубке.

2.46. В задаче 2.44 составить дифференциальное уравнение движения точки в трубке с учётом трения скольжения между точкой и трубкой с коэффициентом f.



2.47. Прямолинейная горизонтальная трубка AB длины l вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через точку O, причём $OA = R_1$ и $OB = R_2$. Внутри трубки может двигаться без трения шарик M массы m. Найти относительное движение шарика, если известно, что в начальный момент времени он находился в точке A и его относительная скорость была равна v_0. Определить горизонтальную составляющую реакции трубки. Найти момент времени, когда шарик вылетит из трубки. Определить относительную скорость шарика в момент вылета из трубки.

2.48. Согнутая в виде окружности радиуса r трубка находится в горизонтальной плоскости и вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через точку A окружности против часовой стрелки. Внутри трубки может перемещаться без трения шарик M массы m. В начальный момент времени шарик находился в некоторой точке B окружности и его относительная скорость равнялась v_0. Найти относительную скорость шарика и горизонтальную составляющую реакции трубки как функции угла $\varphi = AOM$ (O — центр окружности). Определить период малых колебаний шарика около его положения относительного равновесия.

2.49. Учитывая суточное вращение Земли, определить закон относительного движения материальной точки, движущейся без трения с начальной относительной скоростью v_0 в горизонтальной плоскости на широте φ.

2.50. Плоскость Oxz вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Материальная точка массы m движется без трения в этой плоскости под действием силы тяжести. В начальный момент времени точка имела координаты (x_0, z_0), а её относительная скорость равнялась нулю. Найти закон относительного движения точки. Определить реакцию вращающейся плоскости.

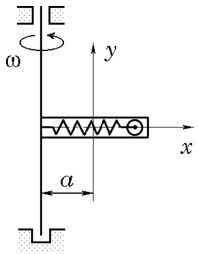
2.51. Материальная точка движется в плоскости Oxy, которая вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Доказать, что в относительном движении точки имеют

место следующие равенства:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2) = \text{const},$$
$$y\dot{x} - x\dot{y} - \omega(x^2 + y^2) = \text{const}.$$

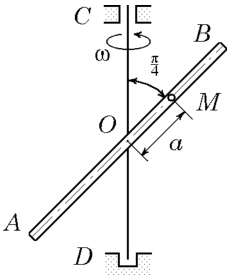
2.52. Материальная точка M массы m движется без трения по гладкой горизонтальной плоскости, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через точку O плоскости. Точка M притягивается к точке O силой, величина которой равна $F = m\omega^2 r$, где $r = OM$. Найти закон относительного движения точки M для произвольных начальных условий.

2.53. Гладкая горизонтальная трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через её конец. В трубке находится шарик массы m, прикреплённый к концу трубки пружиной жёсткости c, длина которой в свободном состоянии равна a. В начальный момент времени шарик находится на расстоянии a от оси вращения и его относительная скорость равна нулю. Найти закон относительного движения шарика.

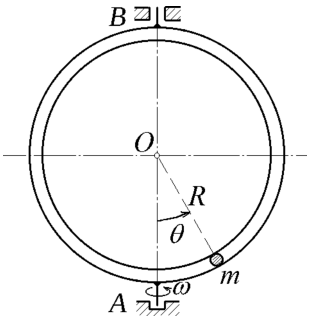


2.54. В вагоне, движущемся равноускоренно по прямолинейному горизонтальному пути, маятник совершает малые гармонические колебания, причём его среднее положение отклонено от вертикали на угол α. Найти: 1) ускорение вагона; 2) период малых колебаний маятника.

2.55. Трубка AB вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси CD, составляя с ней неизменный угол $\frac{\pi}{4}$. В трубке без трения движется точка M, которая в начальный момент времени находилась на расстоянии a от точки O и имела нулевую относительную скорость. Найти закон движения точки относительно трубки.



2.56. Материальная точка массы m движется по окружности радиуса R, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижного вертикального диаметра AB. Составить уравнение движения точки, найти его первый интеграл.

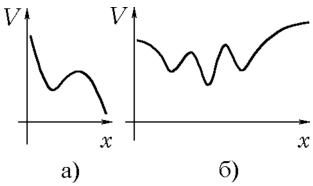


2.57. Определить, как меняется ускорение силы тяжести в зависимости от широты места φ вследствие вращения Земли вокруг своей оси. Радиус Земли считать равным $R = 6370$ км. Угловая скорость Земли равна $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60^2}$ с$^{-1}$.

2.58. Маятник, расположенный на θ северной широты, получает небольшую начальную скорость в вертикальной плоскости север — юг. Считая отклонения маятника от положения равновесия малыми по сравнению с длиной нити и учитывая суточное вращение Земли, найти моменты времени, в которые плоскость качания маятника совпадает с плоскостью запад — восток.

2.59. Точка массы m движется прямолинейно под действием двух сил: силы притяжения, пропорциональной расстоянию x до данной точки, $F = -c_1 mx$, и силы отталкивания, пропорциональной кубу расстояния x, $Q_x = c_2 mx^3$. Нарисовать фазовый портрет.

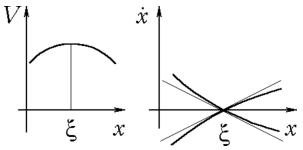
2.60. Нарисовать фазовый портрет механической системы, зная показанную на рисунке зависимость потенциальной энергии от координаты x.



2.61. Нарисовать фазовый портрет математического маятника.

2.62. Нарисовать фазовые портреты уравнения $\ddot{x} = -\sin x + M$, где M — постоянное число.

2.63. Найти угол между сепаратрисами в точке, соответствующей максимуму потенциальной энергии $V(x)$.



2.64. Пусть $S(E)$ — площадь, заключённая внутри замкнутой фазовой кривой, соответствующей уровню энергии E. Доказать, что период движения T по этой кривой равен $T = \frac{dS}{dE}$.

2.65. Потенциальная энергия точки задана функцией $V(x)$, имеющей минимум в точке x_0. Найти период малых колебаний в окрестности точки x_0.

2.66. Найти время движения фазовой точки $(\varphi, \dot{\varphi})$ математического маятника по сепаратрисе из положения φ_1 в положение φ_2. Останется ли время конечным при $\varphi_2 \to \pi$?

2.67. Доказать, что время движения вдоль фазовой траектории от точки x_1 до точки x_2 (в одну сторону) равно

$$t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(h - V(x))}}.$$

2.68. На плоскости $(x, \dot{x})$ изобразить фазовые кривые, описывающие 1) равноускоренное движение; 2) колебания гармонического осциллятора; 3) колебания линейного осциллятора с сухим трением; 4) движение точки по горизонтальной прямой с вязким трением; 5) вертикальное падение точки под действием силы тяжести с вязким трением.

2.69. Шарик движется без трения по вращающейся трубке, имеющей форму окружности радиуса R. Трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через точку O окружности. 1) Пусть окружность горизонтальна. Найти уравнения малых колебаний шарика. 2) Определить период этих малых колебаний. 3) Пусть окружность вертикальна и ось вращения содержит её центр. Найти положения покоя шарика относительно трубки. 4) Построить фазовый портрет при $\omega^2 < \frac{g}{R}$ и при $\omega^2 > \frac{g}{R}$. 5) Как изменятся фазовые портреты, если ось вращения не проходит через центр окружности?

2.2. Геометрия масс

Моментом инерции системы материальных точек относительно данной точки, или полюса, называется сумма произведений масс точек на квадраты расстояний от них до полюса.

Если полюс O совпадает с началом координат, то

$$J_O = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu r_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2).$$

Для масс, распределённых непрерывным образом, сумма в этом выражении заменяется интегралом по области Ω, занимаемой массами,

$$J_O = \int_\Omega r^2 \, dm.$$

Момент инерции системы материальных точек относительно произвольной оси Ou, заданной единичным вектором

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{e}_x + \beta \mathbf{e}_y + \gamma \mathbf{e}_z,$$

где α, β и γ — направляющие косинусы этой оси, выражается следующей формулой:

$$J_{\mathbf{u}} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \Delta_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{u}_\nu)^2 = \\ = J_{xx}\alpha^2 + J_{yy}\beta^2 + J_{zz}\gamma^2 - 2J_{yz}\beta\gamma - 2J_{zx}\gamma\alpha - 2J_{xy}\alpha\beta,$$

где Δ_ν — расстояние от ν-й точки до оси Ou.

Величины

$$J_{xx} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2), \quad J_{yy} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu^2 + z_\nu^2),$$
$$J_{zz} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2)$$

представляют собой моменты инерции относительно осей Ox, Oy и Oz. Величины

$$J_{yz} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu z_\nu, \quad J_{xz} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu z_\nu, \quad J_{xy} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu y_\nu$$

носят название *произведений инерции* или *центробежных моментов инерции* относительно осей y и z, x и z, x и y соответственно.

В случае непрерывно распределённых масс все суммы заменяются соответствующими интегралами.

Тензор инерции $\mathbf{J}$ тела в системе координат $Oxyz$ определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix}.$$

Центром масс системы материальных точек называется точка C, радиус-вектор которой определяется равенством:

$$\mathbf{R}_C = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \mathbf{r}_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu}$$

Теорема Гюйгенса — Штейнера. Момент инерции J_l системы материальных точек относительно некоторой оси l равен сумме момента инерции J_{l_C} системы относительно оси l_C, параллельной l и проходящей через центр масс, и произведения массы M системы на квадрат расстояния d между осями l и l_C:

$$J_l = J_{l_C} + M d^2.$$

2.70. Показать, что в любом твёрдом теле можно найти такие пары параллельных осей u и v, ни одна из которых не проходит через центр масс, что моменты инерции относительно этих осей будут связаны равенством Штейнера $J_v = J_u + M d^2$, где d — расстояние между осями.

2.71. Найти момент инерции массы M, распределённой равномерно по дуге окружности радиуса r с центральным углом α, относительно диаметра, проведённого через середину дуги.

2.72. Найти момент инерции массы M, однородно распределённой по периметру квадрата со стороной a, относительно оси, перпендикулярной плоскости квадрата и проходящей через его центр.

2.73. Найти момент инерции однородной треугольной пластинки массы M со сторонами a, b и c относительно оси, перпендикулярной пластинке и проходящей через вершину, противоположную стороне a.

2.74. Найти момент инерции однородной тонкой треугольной пластинки массы M со сторонами a, b и c относительно оси, перпендикулярной пластинке и проходящей через её центр тяжести.

2.75. Найти момент инерции однородной тонкой пластинки массы M, имеющей форму кругового кольца с радиусами a и b, относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр.

2.76. Найти момент инерции полого шара радиуса R и массы M, имеющего сферическую концентрическую полость радиуса r, относительно диаметра.

2.77. Вычислить главные центральные моменты инерции однородного тора массы M, получаемого вращением окружности радиуса r вокруг оси, лежащей в плоскости окружности и удалённой от её центра на расстояние R, причём $R > r$.

2.78. Доказать, что для однородной пластинки, имеющей форму эллипса с полуосями a и b, моменты инерции равны: 1) относительно одного из диаметров эллипса $J = \frac{1}{4} M \frac{a^2 b^2}{r^2}$, где $2r$ — длина этого диаметра; 2) относительно касательной к эллипсу $J = \frac{5}{4} M \rho^2$, где ρ — длина перпендикуляра, опущенного на касательную из центра эллипса.

2.79. Пусть J_1, J_2, J_3 — главные центральные моменты инерции тела массы m. Найти тензор инерции тела для точки $O(a_1, a_2, a_3)$ в осях $O\xi_1\xi_2\xi_3$, параллельных главным центральным осям.

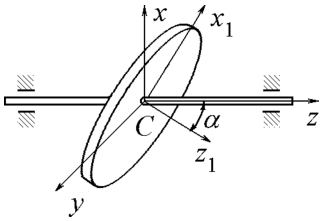
2.80. Доказать, что для любого однородного плоского тела в системе $Oxyz$, оси Ox и Oy которой лежат в плоскости тела, центральный тензор инерции имеет вид

$$\begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & 0 \\ -J_{xy} & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{xx} + J_{yy} \end{pmatrix}.$$

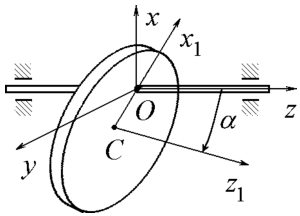
Как изменится соотношение между диагональными элементами этого тензора, если учитывать толщину тела?

2.81. Найти компоненты центрального тензора инерции в главных центральных осях для следующих однородных тел массы M: 1) куба с ребром $2a$; 2) прямоугольного параллелепипеда с рёбрами $2a$, $2b$ и $2c$; 3) тонкой прямоугольной пластинки со сторонами $2a$ и $2b$; 4) тонкого диска радиуса R; 5) прямого кругового цилиндра радиуса R и высоты H; 6) полого цилиндра с внешним радиусом R_2 и внутренним R_1; 7) шара радиуса R; 8) кругового конуса с высотой h и радиусом основания R.

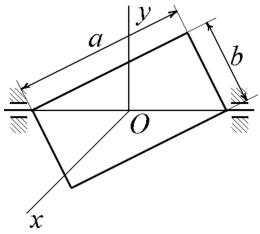
2.82. Однородный круглый диск массы M и радиуса r насажен на ось z, проходящую через его центр масс C. Ось z образует угол α с нормалью к плоскости диска. Найти центробежные моменты инерции диска J_{xz}, J_{yz}, J_{xy} (оси координат показаны на рисунке).



2.83. Однородный круглый диск массы M и радиуса r насажен на ось z, проходящую через некоторую точку O диска, находящуюся на расстоянии a от центра масс C диска. Ось z образует угол α с нормалью к плоскости диска. Найти центробежные моменты инерции диска J_{xz}, J_{yz}, J_{xy} (оси координат показаны на рисунке).



2.84. Однородная прямоугольная пластинка массы M со сторонами a и b прикреплена к оси z, проходящей через одну из её диагоналей. Найти центробежный момент инерции J_{yz} пластинки. Ось y лежит в плоскости пластинки и перпендикулярна оси z.



2.3. Динамика системы материальных точек

Рассмотрим систему N материальных точек, на которые наложены двусторонние (удерживающие) связи, задаваемые независимыми

уравнениями

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, l, \quad l < 3N.$$

Эти уравнения в $3N$-мерном пространстве в каждый момент времени задают поверхность размерности $3N - l$. Число $n = 3N - l$ называется *числом степеней свободы* системы.

Основные теоремы динамики системы материальных точек

Дадим определения основных динамических величин, используемых при описании движения механических систем.

Количеством движения (импульсом) системы материальных точек называется вектор

$$\mathbf{Q} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu,$$

где m_ν — масса точки с номером ν, $\mathbf{v}_\nu$ — её скорость, а N — количество точек системы.

Кинетическим моментом системы материальных точек относительно неподвижной точки O (или *главным моментом количеств движения — импульсов*) называется вектор

$$\mathbf{K}_O = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_\nu,$$

где $\mathbf{r}_\nu$ — радиус-вектор точки с номером ν относительно центра O.

Проекция вектора $\mathbf{K}_O$ на ось, проходящую через центр O, называется *главным моментом количеств движения системы (кинетическим моментом)* относительно этой оси.

Кинетической энергией системы материальных точек называется скалярная величина

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu^2.$$

Введём систему отсчёта с началом в центре масс C системы, движущуюся поступательно. Такую систему называют *осями Кёнига*. Вектор кинетического момента относительно центра O и кинетическая

энергия в абсолютном движении выражаются *формулами Кёнига*

$$\mathbf{K}_O = \overrightarrow{OC} \times M\mathbf{v}_C + \mathbf{K}_C, \quad \text{где } \mathbf{K}_C = \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu \dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu),$$

$$T = \frac{M\mathbf{v}_C^2}{2} + T_C, \quad \text{где } T_C = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu^2,$$

где $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — радиус-вектор ν-ой точки относительно центра масс C, а $M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu$ — масса системы.

В случае плоскопараллельного движения твёрдого тела можно записать

$$K_{Cz} = I_C \omega \quad \text{и} \quad T_C = \frac{I_C \omega^2}{2},$$

где I_C — момент инерции тела относительно оси Cz, перпендикулярной к плоскости движения, $\boldsymbol{\omega}$ — его мгновенная угловая скорость.

Теорема об изменении количества движения системы. Производная по времени от количества движения системы равна сумме главного вектора $\mathbf{F}^{\mathrm{e}} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu^{\mathrm{e}}$ заданных внешних сил, действующих на точки системы, и главного вектора $\mathbf{R}^{\mathrm{e}} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu^{\mathrm{e}}$ реакций внешних связей, т. е.

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}^{\mathrm{e}} + \mathbf{R}^{\mathrm{e}}. \tag{2.8}$$

Поскольку $\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_C$, то из соотношения (2.8) можно получить теорему о движении центра масс системы материальных точек

$$M\dot{\mathbf{v}}_C = \mathbf{F}^{\mathrm{e}} + \mathbf{R}^{\mathrm{e}}.$$

Иными словами, центр масс системы движется так же, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе всей системы, под действием внешних сил.

Если выполняется равенство $\mathbf{F}^{\mathrm{e}} + \mathbf{R}^{\mathrm{e}} = \mathbf{0}$, то вектор количества движения системы не изменяется:

$$\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_C = \mathbf{C},$$

где $\mathbf{C}$ — постоянный вектор. Этот первый интеграл называют *законом сохранения количества движения системы*. В этом случае центр масс системы движется равномерно и прямолинейно.

Если сумма $\mathbf{F}^{\mathrm{e}} + \mathbf{R}^{\mathrm{e}} \neq \mathbf{0}$, но равна нулю сумма проекций всех внешних сил на некоторую неподвижную ось Ox, то получим

$$Q_x = \mathrm{const}, \quad \dot{x}_C = \mathrm{const},$$

т. е. проекция на ось Ox центра масс системы точек будет двигаться равномерно.

Теорема об изменении кинетического момента. Производная по времени от кинетического момента системы материальных точек относительно неподвижного центра O равна сумме главного момента $\mathbf{M}_O^{\mathrm{e}}$ всех действующих на систему заданных внешних сил и главного момента $\mathbf{L}_O^{\mathrm{e}}$ реакций внешних связей, т. е.

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O^{\mathrm{e}} + \mathbf{L}_O^{\mathrm{e}}.$$

Если сумма этих моментов равна нулю, $\mathbf{M}_O^{\mathrm{e}} + \mathbf{L}_O^{\mathrm{e}} = \mathbf{0}$, то имеет место первый интеграл

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{C},$$

где $\mathbf{C}$ — постоянный вектор. Этот первый интеграл называют *законом сохранения вектора кинетического момента.*

Если существует неподвижная ось Oz такая, что относительно неё сумма моментов всех внешних сил и реакций внешних связей равна нулю, то имеет место первый интеграл

$$K_{Oz} = \mathrm{const},$$

т. е. сохраняется кинетический момент относительно оси Oz.

Теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек. Дифференциал кинетической энергии системы материальных точек равен сумме элементарных работ всех заданных сил и реакций связей на действительных перемещениях точек, в которых они приложены,

$$dT = \sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu)\, d\mathbf{r}_\nu.$$

Если выполнены следующие условия:

1. сумма элементарных работ реакций связей на действительных перемещениях равна нулю:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \, d\mathbf{r}_\nu = 0;$$

2. существует функция V такая, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \, d\mathbf{r}_\nu = -V,$$

то имеет место первый интеграл $T + V = h$, где h — постоянная. Этот первый интеграл называют *законом сохранения полной механической энергии.*

Если удаётся получить систему уравнений, не содержащих реакций связей, определение движения системы сводится к интегрированию системы n дифференциальных уравнений второго порядка, где n — число степеней свободы системы.

Возможными (виртуальными) перемещениями точек системы называются перемещения, задаваемые любым набором векторов

$$\delta\mathbf{r}_\nu = (\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu), \quad \nu = 1, \ldots, N,$$

удовлетворяющих условиям

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{\partial f_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial f_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)}{\partial z_\nu} \delta z_\nu \right) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, l.$$

Связи называются *идеальными,* если на любых возможных перемещениях системы выполняется условие

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \, \delta\mathbf{r}_\nu = 0,$$

т. е. сумма работ реакций связей на любых возможных перемещениях системы равна нулю.

Реакции связей — это прилагаемые к точкам рассматриваемой системы дополнительные силы, которые при мысленном удалении связей обеспечивают такие же движения системы, как и при наличии связей.

Уравнения движения точек системы после введения реакций связей записывают в форме

$$m\ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, n, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{F}_\nu$ и $\mathbf{R}_\nu$ — равнодействующие заданных сил и реакций связей, действующих на ν-ю точку, соответственно. В этом состоит *принцип освобождаемости от связей.*

Из условия идеальности связей и уравнения (2.9) следует общее уравнение динамики, которое часто называют также *принципом Даламбера — Лагранжа:*

$$\sum_{\nu=1}^{N} (m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{F}_\nu)\, \delta\mathbf{r}_\nu = 0. \tag{2.10}$$

Этот принцип позволяет записывать разные формы уравнений движения, не содержащих реакции связей.

1) Если среди возможных перемещений системы в любой момент времени есть поступательное перемещение всей системы как твёрдого тела параллельно некоторому неподвижному направлению, например, оси Ox, то производная по времени от проекции количества движения системы на это направление равна сумме проекций внешних заданных сил на это направление, т. е.

$$\dot{Q}_x = F_x^{\mathrm{e}}.$$

2) Если среди возможных перемещений системы в любой момент времени есть вращение всей системы как твёрдого тела вокруг некоторой неподвижной оси, например Oz, то производная по времени от кинетического момента относительно этой оси равна сумме моментов внешних заданных сил, т. е.

$$\dot{K}_z = M_z^{\mathrm{e}}.$$

3) Если действительные перемещения системы находятся среди возможных перемещений, то имеет место теорема об изменении кинетической энергии системы

$$dT = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu\, d\mathbf{r}_\nu.$$

Изложенные теоремы справедливы в инерциальной системе отсчёта. В неинерциальной системе отсчёта эти теоремы также могут быть применены, если к заданным силам и реакциям связей добавить силы инерции — переносные и кориолисовы.

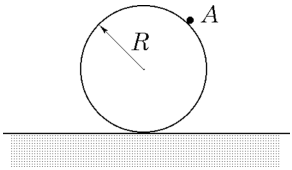
Особым преимуществом обладают оси Кёнига, поскольку в них теоремы об изменении кинетического момента и кинетической энергии сохраняют такой же вид, как в инерциальной системе отсчёта, а именно,

$$\dot{\mathbf{K}}_C = \mathbf{M}^{\mathrm{e}}_C + \mathbf{L}^{\mathrm{e}}_C,$$

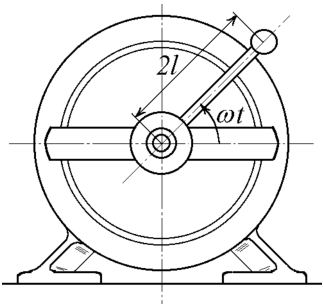
$$dT_C = \sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu)\, d\boldsymbol{\rho}_\nu,$$

где $d\boldsymbol{\rho}_\nu$ — относительное действительное перемещение ν-й точки системы в осях Кёнига.

2.85. Найти абсолютную траекторию шарика A массы m, скатывающегося по поверхности абсолютно гладкого однородного цилиндра массы M радиуса R, лежащего на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Движение начинается из состояния покоя.

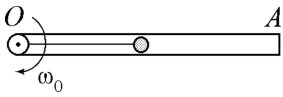


2.86. Электрический мотор с корпусом массы M_1 установлен без креплений на гладком горизонтальном фундаменте; на валу мотора под прямым углом закреплён одним концом однородный стержень длины $2l$ и массы M_2, на другой конец стержня насажен точечный груз массы M_3; угловая скорость вала равна ω. Определить: 1) горизонтальное движение корпуса мотора при условии, что в начальный момент корпус покоился; 2) при каких значениях угловой скорости ω вала электромотор, не закреплённый на фундаменте, будет подпрыгивать над ним; 3) наибольшее значение горизонтальной составляющей реакции, если корпус электромотора закрепить на фундаменте.

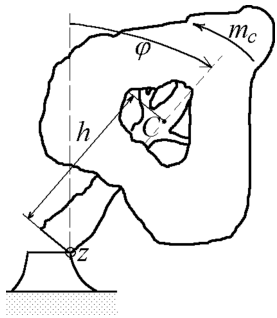


2.87. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежит обруч радиуса a и массы M, вдоль которого в некоторый момент начинает ползти жук массы m. Найти траектории центра обруча и жука.

2.88. Горизонтальная однородная трубка OA массы M и длины $2l$ вращается по инерции с угловой скоростью ω_0 вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через конец O. В трубке в середине отрезка OA закреплён шарик массы m. В некоторый момент шарик освободили. Найти угловую скорость трубки после того, как шарик выскочит из неё.

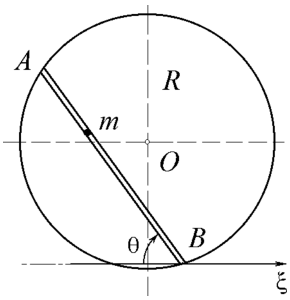


2.89. Определить, с какой угловой скоростью упадёт на землю спиленное дерево массы M, если его центр масс C расположен на расстоянии h от основания, а момент сил сопротивления воздуха равен $m_c = -k\dot{\varphi}^2$, где $k = \text{const}$. Момент инерции дерева относительно оси z, вокруг которой поворачивается дерево при падении, равен J.

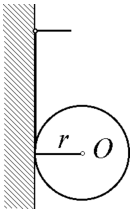


2.90. Две свободные материальные точки с массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними, коэффициент пропорциональности равен k. В начальный момент точки покоятся, расстояние между ними равно a. Найти скорости точек в тот момент, когда расстояние между ними уменьшится вдвое.

2.91. Концы однородного стержня массы M и длины $2l$ скользят по неподвижной гладкой горизонтальной окружности радиуса R, $R > l$. По стержню движется материальная точка массы m с относительной скоростью $v = at$, $a = \text{const}$. В начальный момент стержень покоится, а точка находится в его середине. Найти закон движения стержня, определяя его положение углом θ с некоторым неподвижным направлением ξ.

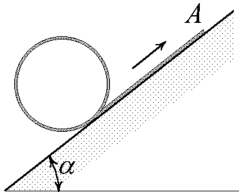


2.92. На однородный диск радиуса r и массы m намотана невесомая нить, конец которой прикреплён к вертикальной стене. Найти ускорение центра диска, угловое ускорение диска, натяжение нити и реакцию стены в точке касания при движении диска вниз.



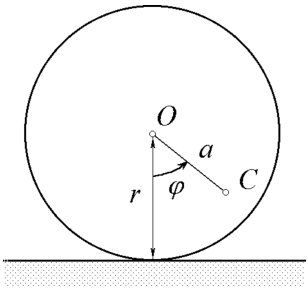
2.93. Однородный цилиндр массы M под действием силы тяжести катится без проскальзывания по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Найти ускорение центра масс цилиндра, а также реакцию в точке контакта с плоскостью.

2.94. Однородный цилиндр массы M и радиуса r движется по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. На цилиндр намотана нить, не проскальзывающая по нему; свободный конец A нити тянут вверх вдоль наклонной плоскости с постоянным ускорением a_0. Найти ускорение центра масс цилиндра и натяжение нити. Исследовать случаи $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

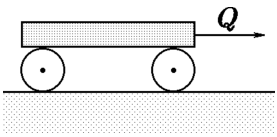


2.95. Для предыдущей задачи найти, с каким ускорением надо тянуть вверх нить, чтобы цилиндр вращался на месте. Найти натяжение нити в этом случае. Рассмотреть случай $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

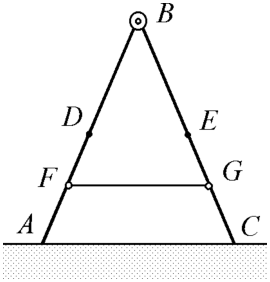
2.96. Диск радиуса r может катиться без проскальзывания по горизонтальной прямой. Центр масс диска находится в точке C, не совпадающей с его центром O, расстояние $OC = a$. Радиус инерции диска относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через точку C, равен k. В начальный момент отрезок OC образует с вертикалью угол $\varphi = \varphi_0$ и $\dot{\varphi} = 0$. Найти угловую скорость диска как функцию угла φ. Найти период малых колебаний около положения равновесия.



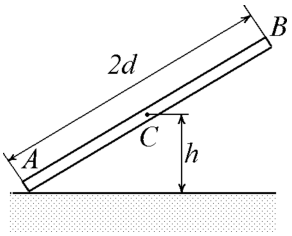
2.97. Доска массы M лежит на двух одинаковых катках массы m каждый. Катки — однородные цилиндры. На доску действует горизонтальная сила Q. Определить ускорение доски. Проскальзывание отсутствует.



2.98. Стремянка ABC с шарниром B, $AB = BC = 2l$, стоит на гладком горизонтальном полу, центры масс лестниц находятся в их серединах D и E, радиус инерции каждой лестницы относительно оси, проходящей через центр масс, равен ρ, расстояние от шарнира B до пола равно h и массы лестниц одинаковы. В некоторый момент времени стремянка начинает падать из-за разрыва стержня FG. Пренебрегая трением в шарнире, определить скорость точки B как функцию расстояния y от точки B до пола.



2.99. Однородный стержень AB длины $2d$ и массы M падает, скользя концом A по гладкому горизонтальному полу. В начальный момент стержень покоился. Найти: 1) траекторию конца B; 2) скорость центра масс C стержня как функцию высоты точки C над полом, если в начальный момент центр масс стержня находится на высоте y_0 над полом, $y_0 \leqslant d$; 3) реакцию пола в точке A в начальный момент, если в этот момент стержень составлял с полом угол $\frac{\pi}{3}$.



2.100. Однородный стержень длины l и массы m может свободно вращаться в пространстве вокруг своего неподвижного конца. В начальный момент стержень расположен в горизонтальной плоскости, скорость его свободного конца равна v_0 и направлена горизонтально. Найти наименьшее значение угла, образуемого стержнем с вертикалью при движении.

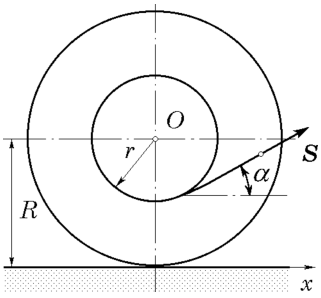
2.101. По наклонной плоскости спускаются два одинаковых однородных цилиндра, причём первый скользит без трения, второй катится без проскальзывания. Найти отношение высот, на которые опустятся

центры цилиндров за одно и то же время, если они начинают движение из состояния покоя.

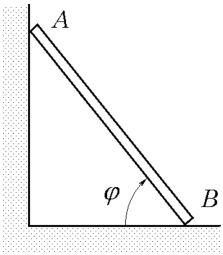
2.102. Физический маятник имеет массу M, расстояние от центра масс до оси вращения равно l, радиус инерции маятника относительно этой оси равен k. В начальный момент маятник отклонили на угол φ_0 от положения равновесия и отпустили из состояния покоя. Найти горизонтальную и вертикальную проекции реакции оси маятника. Найти также проекции этой реакции на прямую, соединяющую точку подвеса с центром масс маятника, и на перпендикуляр к этой прямой, лежащий в вертикальной плоскости.

2.103. Маятник состоит из прямолинейного стержня и прикреплённого к его концу полого шара, массами которых можно пренебречь. Полость шара наполняют один раз жидкостью, а другой раз — твёрдым веществом той же плотности, что и жидкость. Предполагается, что между жидкостью и стенками полости нет трения, и что вещество, наполняющее полость во втором случае, не может двигаться внутри неё. Радиус инерции объёма полости относительно её диаметра равен k, а её центр находится на расстоянии l от оси маятника. Найти периоды малых колебаний маятников в обоих случаях.

2.104. На барабан радиуса r однородного катка массы M и радиуса R, $R > r$, лежащего на горизонтальном шероховатом полу, намотана невесомая нить, к которой приложена сила $\mathbf{S}$ под углом α к горизонту. Радиус инерции катка относительно оси симметрии равен ρ. Определить закон движения оси катка. В начальный момент каток покоился, затем катился без проскальзывания. В какую сторону катится каток?

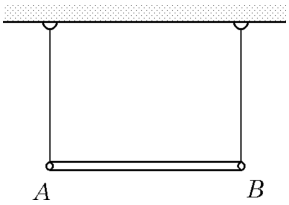


2.105. Однородный стержень AB длины l и массы M под действием силы тяжести скользит без трения концами A и B по вертикальной стене и горизонтальному полу соответственно. В начальный момент стержень был неподвижен и составлял угол φ_0 с горизонталью. Определить угловую скорость стержня и давление, оказываемое им на стену и пол, как функции угла φ между стержнем и плоскостью пола. При каком значении φ стержень отойдёт от стены?

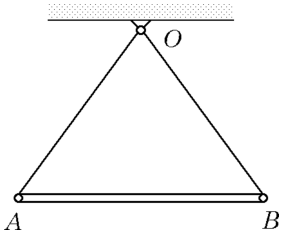


2.106. В предыдущей задаче определить величину угловой скорости стержня и скорость его нижнего конца в момент падения стержня на пол.

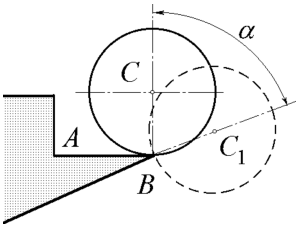
2.107. Однородный стержень AB массы M горизонтально подвешен к потолку посредством двух вертикальных нитей, прикреплённых к концам стержня. Найти натяжение одной из нитей в момент обрыва другой.



2.108. Однородный стержень AB массы M подвешен в точке O на двух нитях равной с ним длины. Определить натяжение одной из нитей в момент обрыва другой.

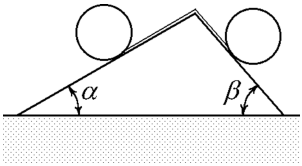


2.109. Тяжёлый однородный цилиндр радиуса R, получив ничтожно малую начальную скорость, скатывается без проскальзывания с горизонтальной площадки AB, край которой B заострён и параллелен образующей цилиндра. Определить угловую скорость цилиндра в момент отделения цилиндра от площадки.

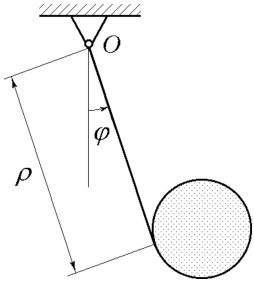


Определить также угол между диаметром цилиндра, проведённым в точку касания, и вертикалью в этот момент. Трением качения пренебречь.

2.110. Два однородных круглых цилиндра с массами M_1 и M_2 движутся по двум гладким наклонным плоскостям, образующим с горизонтом углы α и β соответственно. Цилиндры соединены невесомой нерастяжимой нитью, намотанной на них как показано на рисунке. Нить по цилиндрам не проскальзывает. Найти ускорения центров цилиндров и натяжение нити.

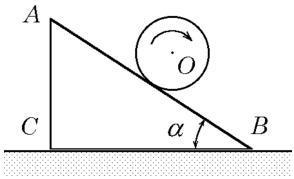


2.111. Один конец нерастяжимой невесомой нити обмотан вокруг однородного круглого цилиндра радиуса R, второй конец прикреплён к неподвижной точке O. Цилиндр, разматывая нить, падает вниз, одновременно раскачиваясь вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса нити. Составить уравнения движения цилиндра, найти их первый интеграл.



2.112. Однородный стержень массы m и длины $2l$ может свободно двигаться по гладкой горизонтальной плоскости. Каждый элемент стержня притягивается неподвижной прямой этой плоскости с силой, прямо пропорциональной с коэффициентом k^2 массе элемента и расстоянию до прямой Ox. Найти движение стержня.

2.113. На гладкой горизонтальной плоскости может скользит треугольная призма ABC массы M. По её грани AB катится без проскальзывания однородный круглый цилиндр массы m. Определить ускорение призмы.



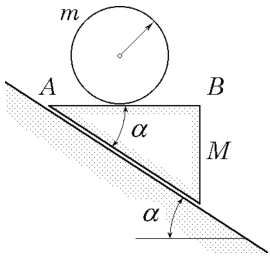
2.114. Однородный стержень длины l вращается на горизонтальной плоскости вокруг своего конца и гонит перед собой материальную точку равной с ним массы. В начальный точка находилась в покое очень близко к неподвижному концу стержня, а стержню сообщили некоторую угловую скорость. Найти угол между абсолютной скоро-

стью точки и стержнем в момент, когда точка достигнет другого конца стержня.

2.115. На однородный цилиндр массы M и радиуса R, ось которого вертикальна и служит осью вращения, накручена невесомая винтовая трубка с шагом h, делающая n витков по поверхности цилиндра. В эту трубку опускают сверху шарик массы m, который, скользя без трения по трубке, приводит её и цилиндр во вращение. Найти угловую скорость цилиндра и абсолютную скорость шарика в момент выхода из трубки.

2.116. Однородный диск массы M и радиуса R лежит на гладкой горизонтальной плоскости. По диску вдоль обода движется материальная точка массы m с относительной скоростью $v = \alpha t$. Найти закон движения диска, если в начальный момент он покоился.

2.117. Прямоугольный клин массы M и с углом α при вершине A может скользить без трения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. По стороне AB клина может катиться без проскальзывания однородный круглый цилиндр радиуса r и массы m. Найти величину ускорения оси цилиндра относительно клина и реакцию наклонной плоскости.



2.4. Движение твёрдого тела с неподвижной точкой и закреплённой осью

Уравнения движения твёрдого тела с неподвижной точкой можно получить с помощью теоремы об изменении кинетического момента

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{L}_O, \tag{2.11}$$

где $\mathbf{K}_O$ — момент количеств движения (кинетический момент) тела в его абсолютном движении и $\mathbf{L}_O$ — момент действующих внешних сил относительно неподвижной точки O. Аналогично, из этой же теоремы можно получить уравнения движения твёрдого тела с неподвижной осью.

В скалярном виде уравнения движения можно получить, проектируя уравнение (2.11) на оси $Oxyz$, связанные с телом. Если эти оси являются главными осями инерции тела, получим динамические уравнения Эйлера

$$A\dot{p} + (C - B)qr = L_x,$$
$$B\dot{q} + (A - C)rp = L_y,$$
$$C\dot{r} + (B - A)pq = L_z,$$

где A, B и C — моменты инерции тела относительно главных осей для точки O; p, q и r — проекции мгновенной угловой скорости на те же оси, а L_x, L_y и L_z — суммы моментов действующих сил относительно этих осей.

Кинематические формулы Эйлера — выражения для угловой скорости тела через углы Эйлера

$$p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$
$$q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$
$$r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi},$$

где ψ, θ и φ — углы прецессии, нутации и собственного вращения. Эти углы определяют положение трёхгранника $Oxyz$ в неподвижном пространстве.

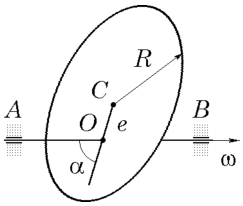
Если динамически симметричному телу с центром масс, лежащим на оси симметрии, сообщить большую угловую скорость ω вокруг оси симметрии, которая в начальный момент неподвижна, и пренебречь нутацией ($\theta = \text{const}$), то движение тела можно приближённо представить как сумму двух вращений: 1) прецессии вместе с вертикальной плоскостью, в которой находится ось симметрии, с угловой скоростью ω_1; 2) собственного вращения вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω, $\omega \gg \omega_1$.

Считая, что при $\omega \gg \omega_1$ вектор кинетического момента направлен по оси симметрии и равен $C\boldsymbol{\omega}$, получаем основное уравнение приближённой теории гироскопа

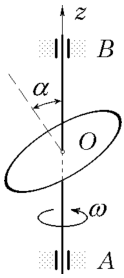
$$\boldsymbol{\omega}_1 \times C\boldsymbol{\omega} = \mathbf{L}_O.$$

2.118. Однородный диск радиуса R и массы M вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω. Центр диска O лежит на оси вращения, а нормаль к плоскости диска образует с этой осью угол α. Найти кинетический момент диска относительно точки O.

2.119. Однородный круглый диск радиуса R и массы m вращается с угловой скоростью ω вокруг оси AB, на которую он насажен с эксцентриситетом $OC = e$, и которая составляет угол α с плоскостью диска. Найти величину и направление кинетического момента диска относительно точки O.

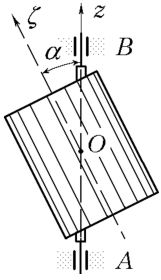


2.120. Диск радиуса R и массы M вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz, причём ось вращения проходит через центр тяжести диска, совпадающий с его центром O, и образует угол α с нормалью к его плоскости. Найти горизонтальные составляющие реакций в подшипниках A и B, расстояние AB между которыми равно l.

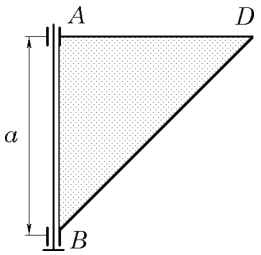


2.121. Однородный круговой цилиндр массы M, высоты H и радиуса R вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс цилиндра C и образующей с осью симметрии цилиндра угол α. Найти кинетический момент цилиндра относительно точки C.

2.122. Однородный круговой цилиндр массы M, высоты $2l$ и радиуса r вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz, проходящей через центр масс цилиндра O. Угол между осью цилиндра $O\zeta$ и осью Oz сохраняет при этом постоянную величину α. Расстояние AB между подшипниками равно h. Определить горизонтальные составляющие реакций в подшипниках.



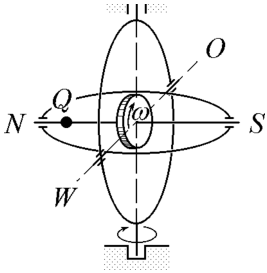
2.123. С какой угловой скоростью нужно вращать вокруг катета $AB = a$ однородную пластинку, имеющую форму равнобедренного прямоугольного треугольника ABD, чтобы горизонтальная составляющая реакции в точке B была равна нулю?



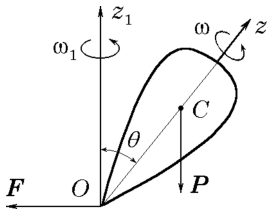
2.124. Гироскоп, моменты инерции которого равны $A = B = 2C$, вращается по инерции вокруг центра масс — совершает регулярную прецессию. Угловая скорость собственного вращения гироскопа равна ω_1, угол между осью гироскопа и осью прецессии равен $\theta = \frac{\pi}{3}$. Найти угловую скорость прецессии.

2.125. Однородный круглый диск вращается по инерции вокруг своего центра масс. В начальный момент диску была сообщена угловая скорость ω_1 вокруг некоторой оси, составляющей с плоскостью диска угол α. Определить угловую скорость прецессии и угол, который ось прецессии составляет с плоскостью диска.

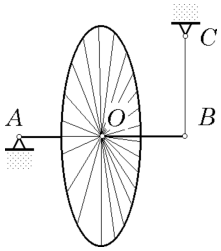
2.126. Уравновешенный гироскоп в карданове подвесе установлен на широте φ северного полушария Земли. Ось ротора гироскопа расположена в плоскости меридиана по горизонтали данной местности. Угловая скорость вращения ротора вокруг своей оси равна ω, момент инерции ротора относительно этой оси равен J, радиус внутреннего кольца подвеса равен a, угловая скорость вращения Земли равна ω_1. Определить массу противовеса, закреплённого на внутреннем кольце подвеса на продолжении оси ротора так, чтобы ось ротора оставалась в плоскости меридиана, вращаясь вместе с Землёй. Трением и массой колец пренебречь.



2.127. Тяжёлый симметричный гироскоп совершает прецессию вокруг вертикальной оси Oz_1, причём угловая скорость ω собственного вращения много больше угловой скорости прецессии. Найти приближённое выражение для горизонтальной составляющей реакции в неподвижной точке O. Вес ротора P, расстояние z_C от неподвижной точки O до центра масс C ротора, момент инерции J ротора относительно оси Oz собственного вращения и угол θ между осями Oz_1 и Oz считать известными.



2.128. Один конец оси велосипедного колеса закреплён неподвижно в точке A с помощью шарового шарнира. Другой конец подвешен на невесомой нерастяжимой нити CB так, что ось AB горизонтальна, а нить CB вертикальна, причём $AO = OB = l$. Радиус колеса равен r, масса колеса m равномерно распределена равномерно по ободу. Пренебрегая массой спиц и оси AOB, найти реакцию в шарнире A в момент обрыва нити, если в этот момент: 1) угловая скорость колеса равна нулю; 2) угловая скорость колеса равна $\omega \mathbf{e}_{AB}$.



2.5. Движение материальной точки и абсолютно твёрдого тела при наличии трения

Движение реальных тел происходит, как правило, с потерей механической энергии. Чтобы учесть эти потери, в моделях классической механики вводится понятие трения.

При описании движения материальной точки по заданной неподвижной линии или поверхности используется закон сухого трения, закон Кулона, суть которого заключается в следующем: реакция $\mathbf{R}$ линии или поверхности является суммой двух составляющих

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_n + \mathbf{R}_\tau,$$

где $\mathbf{R}_n$ — нормальная составляющая реакции, а $\mathbf{R}_\tau$ — касательная составляющая реакции — сила трения, причём если скорость $\mathbf{v}$ точки не равна нулю, то определены и величина и направление силы трения, а именно

$$\mathbf{R}_\tau = -f R_n \frac{\mathbf{v}}{v},$$

если же $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, то сила трения ограничена по величине

$$R_\tau \leqslant f R_n.$$

Безразмерная величина f называется *коэффициентом трения,* а угол α, определяемый из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha = f,$$

называется *углом трения.*

При рассмотрении плоскопараллельного движения абсолютно твёрдого тела, например, круглого диска, касающегося одной своей точкой A неподвижной кривой, применяются две модели взаимодействия диска и кривой.

1. Реакция кривой сводится к одной силе $\mathbf{R}$, приложенной к диску в точке контакта A, причём

   $$\mathbf{R} = \mathbf{R}_n + \mathbf{R}_\tau,$$

   где $\mathbf{R}_n$ — нормальная к кривой составляющая реакции, а $\mathbf{R}_\tau$ — составляющая реакции, направленная по общей касательной к диску и к кривой в точке A, причём

   $$\mathbf{R}_\tau = -f R_n \frac{\mathbf{v}_A}{v_A}, \quad \text{если } \mathbf{v}_A \neq \mathbf{0},$$
   $$R_\tau \leqslant f R_n, \quad \text{если } \mathbf{v}_A = \mathbf{0}.$$

   Здесь $\mathbf{v}_A$ — скорость точки A диска, f — коэффициент трения скольжения. Составляющая $\mathbf{R}_\tau$ в этом случае называется *силой трения скольжения.*

2. Суммарная реакция кривой, приведённая к точке A диска, эквивалентна силе $\mathbf{R} = \mathbf{R}_n + \mathbf{R}_\tau$ и паре с моментом $\boldsymbol{\mu}$. Силы $\mathbf{R}_n$ и $\mathbf{R}_\tau$ и в этом случае называют *нормальной и касательной составляющими реакции.*

Пусть скорость точки A диска равна $\mathbf{v}_A$, а его угловая скорость равна $\boldsymbol{\omega}$. Тогда принимают следующие модели:

1. Если $v_A \neq 0$ и $\omega \neq 0$, т. е. диск скользит по кривой и вращается, то
$$\mathbf{R}_\tau = -f R_n \frac{\mathbf{v}_A}{v_A}, \quad \boldsymbol{\mu} = -\delta R_n \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}.$$
2. Если $v_A \neq 0$ и $\omega = 0$, т. е. диск скользит по кривой, но не вращается, то
$$\mathbf{R}_\tau = -f R_n \frac{\mathbf{v}_A}{v_A}, \quad \mu \leqslant \delta R_n,$$
3. Если $v_a = 0$ и $\omega \neq 0$, т. е. диск катится по кривой без проскальзывания, то
$$R_\tau \leqslant f R_n, \quad \boldsymbol{\mu} = -\delta R_n \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}.$$
4. Если $v_A = 0$ и $\omega = 0$, т. е. диск находится в состоянии покоя, то
$$R_\tau \leqslant f R_n, \quad \mu \leqslant \delta R_n.$$

Здесь f — коэффициент трения скольжения, безразмерная величина, δ — коэффициент трения качения, имеет размерность длины.

2.129. Брусок массы M, получивший начальную скорость v_0, движется по горизонтальной плоскости с сухим трением с коэффициентом f и испытывает сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости, причём коэффициент пропорциональности равен k. Определить путь, пройденный бруском до остановки.

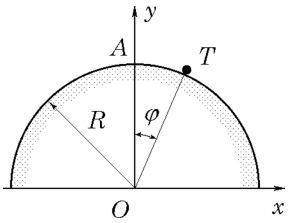
2.130. Шарик массы m нанизан на горизонтальную проволочную окружность радиуса r и может скользить по ней. Коэффициент трения скольжения равен f. Какую начальную скорость нужно сообщить шарику, чтобы он сделал по окружности один полный оборот?

2.131. Материальная точка движется под действием силы тяжести по внутренней поверхности неподвижной полусферы радиуса r, выходя без начальной скорости из точки, лежащей на экваторе. Коэффициент трения равен f. Найти скорость, с которой шарик достигнет нижнего полюса полусферы.

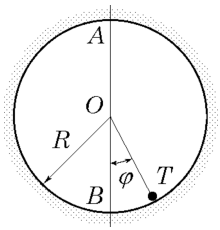
2.132. Брусок находится в покое на шероховатой наклонной плоскости, причём коэффициент трения покоя равен f_0, а коэффициент трения скольжения равен f. Плоскость наклонена под углом α к горизонту, $\operatorname{tg}\alpha < f_0$. В некоторый момент бруску сообщена начальная скорость $\mathbf{v}_0$, направленная вдоль плоскости вниз. Определить путь, пройденный бруском до остановки.

2.133. Брусок, имеющий начальную скорость v_0, движется по горизонтальной плоскости с трением, пропорциональным нормальному давлению, и проходит до полной остановки путь s. Найти коэффициент трения скольжения.

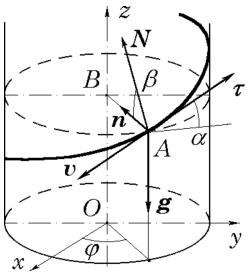
2.134. Материальная точка T находится в верхнем полюсе A неподвижной шероховатой полусферы радиуса R. Какую начальную горизонтальную скорость v_0 нужно придать точке, чтобы она, начав движение, оставалась на поверхности полусферы? Считать, что коэффициенты трения скольжения и покоя одинаковы и равны f.



2.135. Материальная точка T находится в нижнем полюсе B внутренней части неподвижной шероховатой сферы радиуса R. При каких значениях начальной горизонтальной скорости точка достигнет верхнего полюса A сферы? Коэффициент трения скольжения равен f.



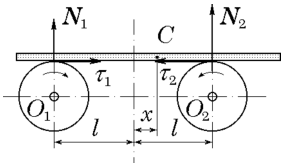
2.136. Материальная точка A под действием силы тяжести движется по шероховатой винтовой поверхности, ось Oz которой вертикальна. Поверхность задана уравнением $z = a\varphi + f(r)$. Коэффициент трения точки о поверхность равен k. Найти условие, при котором движение точки происходит на постоянном расстоянии от оси $AB = r_0$, т. е. происходит по винтовой линии, а также найти ско-



рость этого движения.

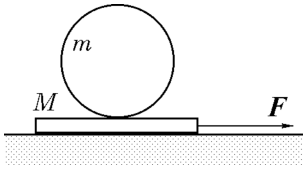
Указание. Воспользуйтесь представлением движения с помощью естественного трёхгранника.

2.137. На два одинаковых вращающихся в противоположные стороны цилиндрических шкива свободно положен однородный стержень. Центры шкивов лежат на одной горизонтальной прямой, расстояние между ними равно $2l$. Стержень движется под действием сил трения, возникающих в точках касания со шкивами. Эти силы пропорциональны давлению стержня на шкив, коэффициент трения равен f. 1) Определить движение стержня, если его сдвинуть на расстояние x_0 при нулевой начальной скорости. 2) Найти значение коэффициента трения f, при котором период колебаний стержня будет равен T.



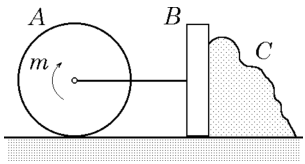
2.138. Материальная точка с начальной скоростью v_0 движется в поле силы тяжести вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения скольжения равен f. При каких значениях угла α точка вернётся в начальное положение, и какова будет её скорость в этот момент?

2.139. Доска массы M движется по горизонтальной плоскости под действием горизонтальной силы F. Коэффициент трения между доской и плоскостью равен f. На доске лежит однородный круглый цилиндр массы m, который может катиться по доске без проскальзывания. Определить ускорение доски.

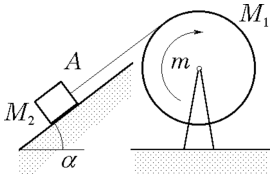


2.140. Найти условие возможности качения без проскальзывания круглого цилиндра радиуса r, положенного без начальной скорости на шероховатую наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол α. Коэффициент трения скольжения равен f. Радиус инерции цилиндра относительно оси симметрии равен k.

2.141. Ведущее колесо A снегоочистителя имеет радиус r и массу M_1, равномерно распределённую по ободу. К колесу приложен постоянный вращающий момент m. Суммарная масса снега C, щита B и других поступательно движущихся частей постоянна и равна M_2. Коэффициент трения скольжения снега и щита о землю равен $f_к$. Найти зависимость между путём, пройденным щитом B, и модулем его скорости. В начальный момент система покоилась.



2.142. К диску массы M_1 и радиуса r приложен постоянный вращающий момент m. На диск намотана невесомая нить, к свободному концу которой привязан груз массы M_2, который поднимается по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Коэффициент трения груза о плоскость равен f. Какую угловую скорость приобретёт диск, повернувшись на угол φ?



2.143. Ведущее колесо автомобиля имеет радиус r и массу M, его ось движется горизонтально и прямолинейно. Радиус инерции колеса относительно его оси равен ρ. К колесу приложен вращающий момент m. Коэффициент трения скольжения колеса о землю равен f. Какому условию должен удовлетворять вращающий момент, чтобы колесо катилось без проскальзывания?

2.144. Решить предыдущую задачу с учётом трения качения. Коэффициент трения качения равен $f_к$.

2.145. Ведомое колесо автомобиля имеет радиус r и массу M, его ось движется горизонтально и прямолинейно. Радиус инерции колеса относительно его оси равен ρ. К оси колеса приложена горизонтальная сила F. Коэффициент трения скольжения колеса о землю равен f. Какому условию должна удовлетворять приложенная сила, чтобы колесо катилось без проскальзывания?

2.146. Решить предыдущую задачу с учётом трения качения. Коэффициент трения качения равен $f_к$.

2.147. Колесо радиуса r и массы M, равномерно распределённой по его ободу, движется из состояния покоя по прямолинейному гори-

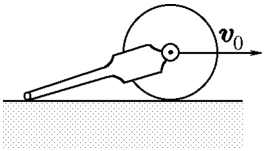
зонтальному рельсу под действием приложенного вращающего момента $m = \frac{5}{2} f M g r$, где f — коэффициент трения скольжения. Найти скорость проскальзывания — скорость точки колеса, соприкасающейся с рельсом.

2.148. Решить предыдущую задачу с учётом трения качения. Коэффициент трения качения равен $f_к = \frac{1}{4} f r$.

2.149. Однородный цилиндр, ось которого горизонтальна, под действием силы тяжести катится с проскальзыванием по наклонной плоскости. Коэффициент трения скольжения равен f. Какие значения может принимать угол наклона плоскости к горизонту, и каково будет ускорение оси цилиндра?

2.150. Однородный цилиндр радиуса r катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Начальная скорость его оси равна v_0, коэффициент трения качения равен δ. Какое расстояние пройдёт ось цилиндра до остановки?

2.151. Садовый каток радиуса r лежит на земле так, что его ручка длины l, одинакового с ним веса, опирается о землю. Центру катка сообщают начальную скорость v_0. Найти, на каком расстоянии остановится каток, если коэффициент трения качения катка равен δ, а коэффициент трения скольжения между ручкой катка и землёй равен f. Считать, что центр тяжести ручки находится в её середине.



2.152. Цилиндр радиуса r находится на наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения скольжения равен f, условия чистого качения не выполнены, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha > \frac{k^2 + r^2}{k^2} f,$$

где k — радиус инерции цилиндра относительно его оси. В начальный момент времени цилиндр находился в покое. Найти движение цилиндра.

Ответы

1.1.
$$v = \frac{\omega r}{b}\sqrt{r(2a - r)}.$$

1.2. Логарифмическая спираль $r = r_0 e^{\frac{c\varphi}{b}}$; закон движения
$$r = r_0 + ct, \quad \varphi = \frac{b}{c}\ln\left(\frac{ct}{r_0} + 1\right).$$

1.3. Окружность радиуса $\frac{c}{2\omega}$, касающаяся в полюсе полярной оси.

1.4. Окружность радиуса b с центром в точке O.

1.6.
$$r = \frac{cr_0}{c - br_0(\varphi - \varphi_0)}, \quad \dot{\sigma} = \frac{c}{2} = \text{const}.$$

1.8.
$$a_{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{v}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}),$$
$$a_{\boldsymbol{\nu}} = \frac{1}{v}\sqrt{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2},$$

где $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$.

1.9.
$$\rho = \frac{1}{bg}\left(b^2 + \left(c - \frac{g}{b}x\right)^2\right)^{\frac{3}{2}},$$

в вершине траектории $\rho = \frac{b^2}{g}$.

1.10. $v = \sqrt{2}kr$, $a = 2k^2 r$, $\rho = \sqrt{2}r$.

1.11. Цепная линия $y = b\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{b}$; радиус кривизны $\rho = \frac{y^2}{b}$.

1.12.
$$\mathbf{v} = (0, bk, \nu), \quad \mathbf{a} = (-bk^2, 0, 0);$$

касательное и нормальное ускорения равны $a_\tau = 0$ и $a_n = bk^2$; радиус кривизны равен
$$\rho = \frac{b^2k^2 + \nu^2}{bk^2}.$$

1.13. Локсодромия

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_0}{2}\right)e^{(\theta-\theta_0)\operatorname{ctg}\alpha}.$$

1.14.

$$a_r=-\frac{v^2}{R},\quad a_\theta=\frac{v^2}{R}\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\varphi,\quad a_\varphi=-\frac{v^2}{R}\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi,$$

$$a=\frac{v^2}{R}\sqrt{1+\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi},\quad \rho=\frac{R}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi}},$$

где R — радиус Земли,

$$\varphi=\varphi_0+\frac{vt\cos\alpha}{R}.$$

1.15. Логарифмическая спираль $r=r_0e^{-\varphi\operatorname{ctg}\alpha}$. При $\alpha=\frac{\pi}{2}$ — окружность $r=r_0$; при $\alpha=0$ или $\alpha=\pi$ — прямая $\varphi=0$.

1.16.

$$v=\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha}.$$

1.17.

$$v=\sqrt{c_2^2+c_1^2\sin^2\varphi},\quad \operatorname{tg}\angle(\mathbf{c}_2,\mathbf{v})=\frac{c_1}{c_2}\sin\varphi,$$

$$r=r_0\operatorname{ctg}^k\alpha_0\operatorname{tg}^k\alpha,$$

где $k=\frac{c_2}{c_1}$, $\alpha=\frac{\varphi}{2}$.

1.18. $v=\omega R$.

1.22. $OM=r=\frac{v}{\omega}\sin\omega t$. Траектория — окружность радиуса $\frac{v}{2\omega}$, касающаяся оси Ox в точке O. Ускорение $a=2v\omega$ направлено к центру окружности.

1.23.

$$v=a_0\sqrt{\omega_0^2\cos^2\omega_0t+\omega^2(1+\sin\omega_0t)^2},$$

$$a=a_0\sqrt{4\omega^2\omega_0^2\cos^2\omega t+(\omega^2+(\omega^2+\omega_0^2)\sin\omega_0t)^2}.$$

1.24.

$$v=\frac{a_0t}{2}\sqrt{4+\varphi_0^2\omega^2t^2\cos^2\omega t},$$

$$a=\frac{a_0}{2}\sqrt{(2-\varphi_0^2\omega^2t^2\cos^2\omega t)^2+\varphi_0^2\omega^2t^2(4\cos\omega t-\omega t\sin\omega t)^2}.$$

1.25.
$$v = \sqrt{(\rho\omega + u)^2 + x^2\omega^2}, \quad a = \omega\sqrt{(\rho\omega + 2u)^2 + x^2\omega^2},$$

ускорение образует угол $\arcsin \frac{x\omega^2}{\rho}$ с перпендикуляром к хорде.

1.26. Точка M движется по неподвижной прямой, на которой в начальный момент лежат точки M, O и C со скоростью $v = 2\omega r \sin \omega t$ и ускорением $a = \omega^2 \cdot MC$.

1.27. Траектория — окружность радиуса $\frac{R}{2}$, проходящая через центр диска; $v = R\omega$, $a = 2R\omega^2$.

1.28.
$$v = \frac{l\omega \operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi}.$$

1.29.
$$a_x = \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x - y\dot{\omega}, \quad a_y = \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y - x\dot{\omega}.$$

1.30. 1) Траектория — окружность радиуса $\frac{v_0}{2\omega}$, описываемая со скоростью v_0. 2) Траектория — окружность радиуса r_0 с центром в начале координат, описываемая со скоростью $\frac{\omega r_0}{2}$.

1.31.
$$a = v\omega \sin \alpha \sqrt{\omega^2 t^2 + 4}.$$

1.32.
$$a_{\text{абс.}} = \frac{1}{R}\sqrt{v^4 + 2\omega^2 R^2(1 + \sin^2 \varphi)v^2 + R^4\omega^4 \cos^2 \varphi}.$$

1.33.
$$a_{\text{абс.}} = \frac{\pi^2}{4}\sqrt{c^2 + l^2}.$$

1.34.
$$a_{\text{абс.}} = \frac{1}{R}\sqrt{v^4 + \omega^4 R^4 \sin^2 \varphi + 2\omega^2 R^2 v^2(1 + \cos^2 \varphi)}.$$

1.35.
$$a_1 = r\omega^2 - \frac{u^2}{r}, \quad a_3 = 3r\omega^2 + \frac{u^2}{r}, \quad a_2 = a_4 = 2r\omega^2 + \frac{u^2}{r}.$$

1.36.
$$v_{\text{абс.}} = v_0\sqrt{1 + t^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 \sin^2 \omega_1 t)}.$$

1.37.

$$v_C = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2 \pm 2v\omega r \cos\varphi},$$

$$a_C = \sqrt{\omega^4 r^2 + v^2\left(\frac{v}{\rho} \pm 2\omega\right)^2 - 2\omega^2 v r\left(\frac{v}{\rho} \pm 2\omega\right)\cos\varphi}.$$

1.38.

$$v_E = \frac{hv}{\sqrt{s^2 + h^2}}.$$

1.39.

$$v = \frac{v_0(r+\rho)}{\sqrt{(r+\rho)^2 - v_0^2 t^2}}, \quad a = \frac{v_0^2(r+\rho)^2}{\sqrt{((r+\rho)^2 - v_0^2 t^2)^3}}.$$

1.40.

$$x = \frac{v}{\omega}\arcsin\frac{y}{l} + \sqrt{l^2 - y^2} - l.$$

1.41. $a_{\text{кор.}} = 2{,}91 \cdot 10^{-3}$ м/с^2.

1.42.

$$a_{\text{пер.}} = 1{,}69 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2, \quad a_{\text{отн.}} = 3{,}85 \cdot 10^{-7} \text{ м/с}^2,$$

$$a_{\text{кор.}} = 1{,}61 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2.$$

1.43. В сферических координатах r, φ и θ скорость и ускорение равны

$$\mathbf{v} = \varepsilon_2 lt\mathbf{e}_\varphi + \varepsilon_1 lt\sin\varphi\mathbf{e}_\theta,$$

$$\mathbf{a} = -lt^2(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^2\sin^2\varphi)\mathbf{e}_r + l(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 t\sin\varphi\cos\varphi)\mathbf{e}_\varphi + \\ + l(\varepsilon_1\sin\varphi - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 t^2\cos\varphi)\mathbf{e}_\theta.$$

1.44. Ускорение равно

$$a_M = \omega^2(\varphi_0^2(l-d) - d(2\varphi_0 + 1))$$

и направлено вертикально вверх, если выражение в скобках положительно.

1.47.

$$a_x = \dot{v}_E - \frac{v_E v_N}{R+h}\operatorname{tg}\varphi + \frac{v_E v_R}{R+h} - 2(v_N \sin\varphi - v_R \cos\varphi)\omega,$$

$$a_y = \dot{v}_N - \frac{v_E^2}{R+h}\operatorname{tg}\varphi + \frac{v_N v_R}{R+h} + (R+h)\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi + 2v_E\omega\sin\varphi,$$

$$a_z = \dot{v}_R - \frac{v_E^2 + v_N^2}{R+h} - (R+h)\omega^2\cos^2\varphi - 2v_E\omega\cos\varphi.$$

1.48. Обе центроиды — одинаковые эллипсы с полуосями

$$b \quad \text{и} \quad \sqrt{b^2 - c^2};$$

фокусы неподвижной центроиды — точки A и B, неподвижной — точки C и D. Точка касания центроид P — мгновенный центр вращения.

1.49. Две одинаковые гиперболы с действительной осью, равной $2b$, фокусы неподвижной центроиды совпадают с A и B, фокусы подвижной центроиды совпадают с C и D.

1.50. Неподвижная центроида — окружность радиуса l с центром в точке O; подвижная центроида — окружность радиуса $\frac{l}{2}$ с центром в середине стержня. Траектории — эллипсы

$$\frac{x^2}{(l-m)^2} + \frac{y^2}{m^2} = 1; \quad v_x = \frac{l-m}{l}u, \quad v_y = -\frac{m}{l}u\operatorname{ctg}\varphi,$$

$$a_x = 0, \quad a_y = -\frac{mu^2}{l^2\sin^3\varphi}.$$

1.51. Неподвижная центроида — окружность, проходящая через точки O, M и N; подвижная — окружность вдвое большего радиуса, чем первая, с центром в точке O. Мгновенный центр вращения (точка соприкосновения центроид) находится на неподвижной центроиде в точке, диаметрально противоположной точке O.

1.52. Траектория точки, находящейся на расстоянии c от конца A, есть *улитка Паскаля,* которая в полярных координатах с началом в точке M и полярной осью, проходящей через точку O, задаётся уравнением $\rho = 2r\cos\theta - c$. Неподвижная центроида — окружность радиуса $2r$ с центром в точке A.

1.53.

$$\dot{\varphi} = -\frac{rv}{x\sqrt{x^2 - r^2}},$$

где $x = OA$, $\varphi = \angle OAB$. Неподвижная центроида

$$x^4 - r^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Подвижная центроида — парабола, которая в подвижных осях с началом в точке A, осью Ax_1, направленной вдоль стержня, и осью Ay_1, перпендикулярной стержню, задаётся уравнением $y_1 = \frac{1}{r}x_1^2$.

1.54. Выберем неподвижные оси с началом в точке M и осями, параллельными Ox и Oy. В них неподвижная центроида задаётся уравнением $y_1 = \frac{1}{h}x_1^2$ (парабола). Возьмём подвижные оси с началом в точке A и осью ξ, направленной вдоль стержня. В них подвижная центроида задаётся уравнением

$$\xi^4 - h^2(\xi^2 + \eta^2) = 0.$$

Мгновенная угловая скорость равна

$$\omega = \frac{hv}{x^2 + h^2},$$

где $x = OA$.

1.55.

$$\omega = -2\ \text{с}^{-1}, \quad \varepsilon = -16\ \text{с}^{-2}, \quad a_B = -4\sqrt{2}\ \text{м/с}^2.$$

1.56. При $\alpha = 0$:

$$\omega = -\frac{r\omega_0}{\sqrt{l^2 - h^2}}, \quad \varepsilon = -\frac{hr^2\omega_0^2}{\sqrt{(l^2 - h^2)^3}},$$

$$v_B = -\frac{hr\omega_0}{\sqrt{l^2 - h^2}}, \quad a_B = -r\omega_0^2\left(1 + \frac{rl^2}{\sqrt{(l^2 - h^2)^3}}\right).$$

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

$$\omega = 0, \quad \varepsilon = \frac{r\omega_0^2}{\sqrt{l^2 - (r + h)^2}},$$

$$v_B = r\omega_0, \quad a_B = \frac{r(r + h)\omega_0^2}{\sqrt{l^2 - (r + h)^2}}.$$

1.57.

$$\omega = 0, \quad \varepsilon = \omega_0^2\frac{\sqrt{3}}{6}, \quad a_B = b\omega_0^2\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

1.58.

$$\omega_{BC} = \frac{2a^2}{a^2 - b^2}\omega_0, \quad \varepsilon_{BC} = -\frac{2ab(a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2}\omega_0^2.$$

1.59.

$$a_M = \frac{v_A^2\sqrt{2}}{d}\sqrt{(1 + \sin\varphi)^3}.$$

Ускорение направлено внутрь угла и составляет со стороной MA угол $\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$.

1.60.

1) $OK = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ м, $\quad \angle COK = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $a_C = 0{,}5$ м/с^2, $\quad \mathbf{a}_C \parallel CO$;

3) $a_M = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ м/с^2, $\quad$ составляет угол $\dfrac{\pi}{4}$ с CO;

4) $\rho = \dfrac{R}{2} = 0{,}25$ м.

1.61.

$$\omega_{AB} = \frac{v_0}{3R}, \quad \varepsilon_{AB} = -\frac{2\sqrt{3}}{27}\frac{v_0^2}{R^2}, \quad v_B = 2v_0, \quad a_B = \frac{5\sqrt{3}}{9}\frac{v_0^2}{R}.$$

1.62. Мгновенным центром скоростей M является точка касания подвижной шестерни с неподвижной.

1) $a_M = 2\omega_0^2 R$; $\quad$ 2) $a_N = 2R\sqrt{9\omega_0^4 + 3\varepsilon_0^2}$.

1.63. Мгновенный центр ускорений K совпадает с центром неподвижной окружности, $v_K = 2v_0$. Мгновенный центр скоростей C находится в точке касания диска с окружностью, ускорение точки C направлено к центру окружности и имеет величину $a_C = 2\frac{v_0^2}{r}$.

1.64.

$$\omega = \sqrt{3}\ \text{с}^{-1}, \quad \varepsilon = 0.$$

1.65. Ускорение $\mathbf{a}_C$ направлено от C к B, $a_C = a$.

1.66.

$$\omega = \sqrt{2}\ \text{с}^{-1}, \quad \varepsilon = 1\ \text{с}^{-2}, \quad a_C = 6\ \text{м/с}^2,$$

направлено от C к D.

1.67.

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{a_A^2 + a_B^2 - a_A a_B} = 5\sqrt{3}\ \text{м/с}^2.$$

1.68.

$$\omega = \omega_0 \frac{R-r}{R}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \frac{R-r}{R},$$

$$a_L = \sqrt{\omega_0^4 \left(l + \frac{(R-r)^2}{R}\right)^2 + \varepsilon_0^2 (l+R-r)^2},$$

$$a_K = \sqrt{\omega_0^4 \left(l - \frac{(R-r)^2}{R}\right)^2 + \varepsilon_0^2 (l-R+r)^2},$$

$$a_M = \sqrt{\begin{array}{c}\varepsilon_0^2(l^2 + (R-r)^2) - 2\varepsilon_0\omega_0^2 l(R-r)\dfrac{r}{R} + \\ + \omega_0^4\left(\dfrac{(R-r)^4}{R^2} + l^2\right)\end{array}}.$$

В случае $R = r$ получим

$$\omega = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad a_L = a_K = a_M = l\sqrt{\omega_0^4 + \varepsilon_0^2}.$$

1.69.

$$\omega = \upsilon \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{Rr}, \quad \varepsilon = \frac{\upsilon^2}{Rr}.$$

1.70.

$$a_{\text{ос.}} = \frac{2\upsilon^2 \sin\frac{\varphi}{2}}{R^2 r}\sqrt{(r^2 + R^2)\left(R^2 + r^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)},$$

$$a_{\text{вр.}} = \frac{\upsilon^2}{Rr}\sqrt{R^2 + r^2\cos^2\varphi}.$$

1.71.

$$\omega = \frac{l}{r}\omega_0, \quad \varepsilon = \frac{l}{r}\sqrt{\varepsilon_0^2 + \omega_0^4},$$

$$a_A = \frac{l}{r}\sqrt{\frac{4(rl\varepsilon_0)^2 + \omega_0^4(r^4 + l^4 + 6l^2r^2)}{r^2 + l^2}}, \quad a_B = \frac{l}{r}\omega_0^2\sqrt{l^2 + r^2}.$$

1.72.

$$\mathbf{v}_B = -\frac{2\sqrt{2}\pi h}{T}\mathbf{e}_x, \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{2\pi}{T}\mathbf{e}_y, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{4\pi^2}{T^2}\mathbf{e}_x,$$

$$\mathbf{a}_A = \frac{4\sqrt{2}\pi^2 h}{T^2}\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{a}_B = -\frac{4\sqrt{2}\pi^2 h}{T^2}(\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z).$$

1.73.

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1(\mathbf{e}_z - \operatorname{ctg}\alpha\mathbf{e}_y), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \omega_1^2 \operatorname{ctg}\alpha\mathbf{e}_x,$$

$$\mathbf{a}_C = \omega_1^2 h(\mathbf{e}_y + \operatorname{ctg}\alpha\mathbf{e}_z), \quad \mathbf{a}_D = -\omega_1^2 h(3\mathbf{e}_y + \operatorname{ctg}\alpha\mathbf{e}_z),$$

$$\omega_1 = \pm\frac{\pi n}{30}\ \text{с}^{-1}.$$

1.74.

$$\boldsymbol{\omega} = \pm\sqrt{\frac{a}{R\operatorname{tg}\alpha}}\mathbf{e}_{OA}.$$

1.75. Мгновенная угловая скорость $\omega = 4\pi\ \text{с}^{-1}$ направлена по OM_1; мгновенное угловое ускорение $\varepsilon = 16\pi^2 \sin 2\beta$ лежит в плоскости xOy и направлено перпендикулярно OM_1. $\mathbf{v}_{M_1} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{v}_{M_2} = 2\mathbf{v}_{O_1}$. Ускорение $a_{M_1} = 32\pi^2 h \sin\beta$ лежит в плоскости OM_1M_2, перпендикулярно OM_1 и направлено внутрь конуса; ускорение $\mathbf{a}_{M_2} = \mathbf{a}_{M_2\,\text{вр.}} + \mathbf{a}_{M_2\,\text{ос.}}$, составляющая $a_{M_2\,\text{вр.}} = a_{M_1}$ лежит в той же плоскости перпендикулярно OM_2 и направлено наружу от конуса; ускорение $a_{M_2\,\text{ос.}} = 32\pi^2 h \sin\beta$ направлено к оси OM_1 перпендикулярно ей.

1.76.

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\omega_2 + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)\mathbf{e}_{OA} + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\frac{R}{r}\mathbf{e}_{OC}.$$

1.77. Мгновенная ось вращения:

$$x + 2y = 0, \quad 3x + z = 0; \quad \omega = \sqrt{10{,}25}\ \text{с}^{-1}.$$

1.78.

$$\boldsymbol{\omega} = u(\mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_y), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0\mathbf{e}_x - 2\varepsilon_0\mathbf{e}_y - 2u^2\mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{v}_B = 4ur\mathbf{e}_z, \quad u = \omega_0 + \varepsilon_0 t.$$

1.79.

$$\omega = \sqrt{3}\omega_1, \quad \varepsilon = \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega_1^2, \quad v_C = 2R\omega_1, \quad a_C = \frac{\omega_1^2 R\sqrt{57}}{2}.$$

1.80. Угловая скорость

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 + \frac{\pi n}{15}\omega_1 \cos\alpha}$$

лежит в плоскости SOz, образуя с лучом OS угол β,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\omega_1 \sin\alpha}{\omega_1 \cos\alpha + \frac{\pi n}{30}};$$

угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{\pi n \omega_1}{30}\sin\alpha$$

направлено перпендикулярно плоскости SOz в сторону её вращения.

1.81.

$$\boldsymbol{\omega} = 2\omega_1 \mathbf{e}_y + \omega_1 \mathbf{e}_x, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \omega_1^2 \mathbf{e}_z,$$

$$a_{K\,\text{вр.}} = \frac{10\sqrt{5}}{3}\omega_1^2, \quad a_{K\,\text{ос.}} = 0, \quad a_{L\,\text{вр.}} = a_K, \quad a_{L\,\text{ос.}} = 10\sqrt{5}\omega_1^2.$$

1.82.

$$v_A = v_B = R\omega_1, \quad a_A = a_B = R\omega_1\sqrt{4\omega_2^2 + \omega_1^2}, \quad \varepsilon = \omega_1\omega_2.$$

1.83.

$$\dot{z}_C = 0,$$
$$\dot{x}_C = R(\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi),$$
$$\dot{y}_C = -R(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi).$$

1.84.

$$v = R\omega\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}.$$

1.85.

$$v = R\omega\frac{x}{\sqrt{x^2 - R^2}}.$$

1.86.

$$v_A = \sqrt{\frac{4a^2\pi^2}{\omega^2} - 4R\omega\varphi_0\left(2a\frac{\pi}{\omega} - R\omega\varphi_0\right)\cos^2\frac{a\pi^2}{2R\omega^2}},$$

$$a_A = \sqrt{\begin{array}{c}\left(\left(\frac{2a\pi}{R\omega} - \omega\varphi_0\right)^2 R + R\omega^2\varphi_0^2\cos\frac{a\pi^2}{R\omega^2}\right)^2 + \\ + \left(2a + R\omega^2\varphi_0^2\sin\frac{a\pi^2}{R\omega^2}\right)^2\end{array}}.$$

1.87.

$$\omega_1 = \frac{R\omega - v}{r}.$$

1.88. Клин движется поступательно,

$$v = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos 2\alpha}}{2\cos\alpha}.$$

1.89. Скорость равна $\frac{vd}{r}$ и перпендикулярна к AB.

1.90.

$$\frac{v(R-\rho)}{\rho(R-r)}.$$

1.91.

$$\omega = \left(1 + \sqrt{2}\right)\Omega.$$

1.92.

$$a = b\left(\left(\frac{v}{b} - \omega\right)^2 + 2\left(\frac{v}{b} - \omega\right)\Omega - \Omega^2\right).$$

При $v = \omega b$ получим $a = -b\Omega^2$, при $v = 0$ получим $a = b((\Omega - \omega)^2 - 2\Omega^2)$. Положительным направлением угловых скоростей принято направление против часовой стрелки, а ускорений — вправо от M.

1.93. Угловая скорость $\omega = \omega_0$ и направлена против часовой стрелки. Мгновенный центр скоростей C лежит на продолжении OA,

$$AC = 3R, \quad v_M = R\omega_0\sqrt{10}, \quad a_M = R\sqrt{10(\varepsilon_0^2 + \omega_0^4) - 12\varepsilon_0\omega_0^2}.$$

1.94.

$$v_A = 6 \text{ см/с}, \quad a_A = 2\sqrt{6 + \sqrt{2}} \text{ см/с}^2.$$

1.95.

$$v_1 = \omega v t, \quad a_1 = R^{-1}\sqrt{\omega^4 v^2 R^2 t^2 + v^4},$$

$$v_2 = \sqrt{(v + \omega(vt - R))^2 + (v - \omega R)^2},$$

$$a_2 = R^{-1}\sqrt{((v - \omega R)^2 - \omega^2 R v t)^2 + \omega^2 R^2 (2v - \omega R)^2},$$

$$v_3 = \sqrt{4(v - \omega R)^2 + v^2\omega^2 t^2},$$

$$a_3 = R^{-1}\sqrt{(2(v - \omega R)^2 - v^2)^2 + \omega^4 v^2 R^2 t^2},$$

$$v_4 = \sqrt{(v - \omega(vt + R))^2 + (v - \omega R)^2},$$

$$a_4 = R^{-1}\sqrt{((v - \omega R)^2 + \omega^2 R v t)^2 + \omega^2 R^2 (2v - \omega R)^2}.$$

1.96. При $t = 0$ с:

$$v_M = 10\sqrt{2}\pi \text{ см/с}, \quad a_M = \frac{5}{3}\pi^2 \text{ см/с}^2;$$

при $t_2 = 1$ с:

$$v_M = 10\pi \text{ см/с}, \quad a_M = \frac{5}{3}\pi^2\sqrt{10 + 3\sqrt{3}} \text{ см/с}^2.$$

1.97.

$$v_D = 30\sqrt{6} \text{ см/с}, \quad a_D = 120\sqrt{3} \text{ см/с}^2.$$

1.98.

$$\mathbf{v} = \omega \begin{pmatrix} OA\sin\alpha \\ a\cos\omega t\cos\alpha \\ a\cos\omega t\sin\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sin\alpha(\varepsilon \cdot OA + 2\omega^2 a\sin\omega t) \\ -a\omega^2\sin\omega t\cos\alpha \\ -\omega^2\sin\alpha(OA + a\sin\omega t) \end{pmatrix},$$

$$OA = e + a\sin\omega t.$$

1.99.

$$a_M = \frac{40}{3}\pi^2\sqrt{13 + 6\sqrt{3}} \text{ см/с}^2.$$

1.100.

1) $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \cos\alpha$; 3) $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{1 - \sin^2\alpha\sin^2\varphi}{\cos\alpha}$.

1.101. Угловая скорость диска равна $\frac{v}{r}$. В системе координат $Oxyz$ мгновенная ось вращения задаётся уравнениями

$$y - x = r \quad \text{и} \quad \sqrt{2}x - z = 0.$$

1.102. Уравнения оси винта $z = a$, $y = 2a$; угловая скорость $\omega = -\frac{v}{a}$; линейная скорость v.

1.103.

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\nu}\dot{\rho}, \quad \mathbf{a} = -\boldsymbol{\tau}\frac{v}{\rho}\dot{\rho} + \boldsymbol{\nu}\ddot{\rho}, \quad \rho = \frac{v^3}{|\mathbf{a}\times\mathbf{v}|}.$$

1.104.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau})}{\rho}\boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \left(\frac{(\dot{\mathbf{v}}\cdot\boldsymbol{\tau})}{\rho} - \frac{(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau})\dot{\rho}}{\rho^2}\right)\boldsymbol{\beta}.$$

1.106.

1) $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{\sqrt{2}v}{r}\mathbf{e}_{KL}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{v^2}{r(R-r)}\mathbf{e}_n + \dfrac{\sqrt{2}}{r}\sqrt{a^2 - \left(\dfrac{v^2}{R-r}\right)^2}\,\mathbf{e}_{KL};$

2) $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{\sqrt{2}v}{r}\mathbf{e}_{KL}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{v^2}{r(R+r)}\mathbf{e}_z + \dfrac{\sqrt{2}}{r}\sqrt{a^2 - \left(\dfrac{v^2}{R+r}\right)^2}\,\mathbf{e}_{KL}.$

Здесь K и L — точки касания шара с плоскостью и цилиндром соответственно, $\mathbf{e}_n$ — вектор нормали к плоскости, определяемой осью цилиндра и центром шара.

2.1.

$$h_{\max} = R\left(\frac{v_0}{c}\right)^2, \quad \tau = \frac{Rv_0}{c^2} + \frac{2gR^2}{c^3}\arcsin\frac{v_0}{\sqrt{2gR}},$$

где $c = \sqrt{2gR - v_0^2}$.

2.2.

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t) + v_0 t.$$

2.3. 1) $v_0^2 \geqslant v_1^2 + 2gh$; 2) $\cos\alpha = \frac{v_1}{v_0}$.

2.4.

$$l = \frac{\sqrt{3}}{2}L, \quad h = \frac{L}{8}.$$

2.5.

$$h = \frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{1 - \operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}{(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2)^2}.$$

2.6. Окружность,

$$r = \frac{v_0^2}{2g}.$$

2.7.

$$v = v_0 \sin\alpha \quad \text{при } v_0^2 > \frac{gl}{\sin 2\alpha}.$$

2.8.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2y_1 - x_1 \operatorname{tg}\beta}{x_1}, \quad v_0^2 = \frac{x_1^2 - 4x_1 y_1 \sin\beta\cos\beta + 4y_1^2\cos^2\beta}{2(y_1\cos\beta - x_1\sin\beta)\cos\beta} g.$$

2.9.

$$v_0\sqrt{\frac{mg}{mg + \mu v_0^2}}.$$

2.10. Встреча произойдёт при

$$T = \frac{1}{k}\ln\frac{v_0}{v_0 - ks}$$

при условии $v_0 > ks$. Первое тело пройдёт до встречи расстояние

$$s_1 = \frac{g}{k}\left(T - \frac{s}{v_0}\right).$$

2.11. На 4,9 см.

2.13.

$$x = \frac{v_0\cos\alpha_0}{kg}(1 - e^{-kgt}), \quad y = \frac{1}{k^2 g}(1 + kv_0\sin\alpha_0)(1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k};$$

$$\lim_{t\to+\infty} v = \frac{1}{k}.$$

2.14.

$$v = \sqrt{g\left(\sqrt{h^2 + l^2} + h\right)}.$$

2.15. $d = \frac{v^2}{g}$. Нисколько, камень не может попасть в пешехода.

2.16. Эллипс

$$\frac{kx^2}{mv_0^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1.$$

2.17. Прямая

$$x + 3y = a; \quad v_M = \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot ak\sin\left(\sqrt{3}kt\right).$$

2.18. Парабола, параметр которой равен $\frac{mv_0^2}{eE}$.

2.19. Окружность радиуса $\frac{mv_0}{eH}$.

2.20. В системе координат с началом, совпадающим с начальным положением частицы в поле, осью x, направленной вдоль $\mathbf{v}_0$, и осью y, направленной вдоль $\mathbf{E}$, траектория

$$y = -\frac{eA}{mk^2}\left(1 - \cos\frac{k}{v_0}x\right).$$

2.21.

$$F = \frac{8ma^2c^2}{r^5}, \quad v = \frac{2ac}{r^2},$$

где $\frac{c}{2}$ — секторная скорость точки.

2.22. Логарифмическая спираль $r = r_0 e^{\frac{k}{c}\varphi}$, где $k = \sqrt{a^2 - c^2}$.

2.23. Гипербола

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{ky}{v_0}\right)^2 = 1.$$

2.25.

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}},$$

где γ — универсальная гравитационная постоянная.

2.26.

$$M_1 M_2 = \frac{R_1}{R_2}a.$$

2.27. В полярной системе координат с началом в отверстии и осью, направленной к первоначальному положению шарика, закон движения имеет вид

$$r = R - at, \quad \varphi = \frac{v_0 t}{R - at}.$$

Натяжение нити

$$T = \frac{mv_0^2R^2}{(R - at)^3}.$$

2.28.

$$x = \frac{mgl\sin(\alpha - \varphi)}{c\cos\varphi}\left(1 - \cos\left(t\sqrt{\frac{c}{ml}}\right)\right).$$

2.29.

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gr(\cos\varphi - 1)}, \quad N = Mg\left(\frac{v_0^2}{gr} + 3\cos\varphi - 2\right).$$

2.30. 1) Если $v_0 \geqslant \sqrt{5gr}$, то шарик обходит всю окружность, причём величина его скорости изменяется от v_0 до $\sqrt{v_0^2 - 4gr}$; 2) если

$$\sqrt{2gr} < v_0 < \sqrt{5gr},$$

то шарик покидает окружность при

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3gr}\right) < \pi$$

со скоростью

$$v_1 = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gr}{3}};$$

3) если $0 < v_0 < \sqrt{2gr}$, то шарик совершает колебания по дуге окружности, амплитуда которых равна

$$\varphi = \arccos\left(1 - \frac{v_0^2}{2gr}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

2.31. В системе координат с началом, совпадающим с начальным положением точки, осью x, направленной горизонтально, и осью y, направленной вниз, траектория задаётся уравнением

$$x^2 = \frac{8g}{9c^2} y^3.$$

Эту линию называют полукубической параболой.

2.32.

$$\tau = 6\sqrt{\frac{r}{g}} = 3\tau_1,$$

τ_1 — время свободного падения с высоты $2r$.

2.33.

$$mg\left(1 + \frac{2b^2}{a^2}\right).$$

2.34. $v = 1{,}77$ м/с.

2.35.

$$h_0 = r\left(1 + \cos\alpha + \frac{1}{2\cos\alpha}\right);$$

h_0 минимальна при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2.36. Давление равно

$$N = (cR + mg)(3\cos 2\varphi - 2\cos 2\varphi_0) - cR$$

и направлено наружу при $N > 0$, внутрь при $N < 0$.

2.37.

$$N = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{r}.$$

2.38. При $v_0 < \sqrt{gR}$ камень сойдёт с купола при

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right).$$

Если $v_0 \geqslant \sqrt{gR}$, то камень сойдёт в начальный момент.

2.39.

$$N = \frac{mg}{R}\left(3h - 2h_0 - \frac{v_0^2}{g}\right).$$

2.40.

$$r^2 = e^{2t} + e^{-2t}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{2t}.$$

2.41.

$$N = m\sin\alpha\left(g + \frac{a^2 v_0^2 \sin 2\alpha}{2r^3}\right).$$

2.42.

$$OM' = a\operatorname{ch}\omega t, \quad N = 2am\omega^2 \operatorname{sh}\omega t.$$

2.44.

$$v_{\text{отн.}} = \omega\sqrt{L^2 - x_0^2}.$$

2.45.

$$\tau = \frac{1}{\omega}\ln\frac{L + \sqrt{L^2 - x_0^2}}{x_0}.$$

2.46.

$$\ddot{x} = \omega^2 x - \operatorname{sign}\dot{x} \cdot f\sqrt{g^2 + 4\omega^2\dot{x}^2}.$$

2.47.

$$AM = \frac{1}{2\omega}((a\omega + v_0)e^{\omega t} + (a\omega - v_0)e^{-\omega t}) - a;$$

$$N = m\omega\left((a\omega + v_0)e^{\omega t} - (a\omega - v_0)e^{-\omega t} + \omega\sqrt{R_1^2 - a^2}\right);$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\ln\frac{\omega(a+l)+v_1}{\omega a + v_0}; \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 + \omega^2(R_2^2 - R_1^2)},$$

где

$$a = \frac{R_2^2 - R_1^2 - l^2}{2l}.$$

2.48.

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2r^2\omega^2(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)};$$

$$N = mr\left(\left(\omega + \frac{v}{r}\right)^2 - \omega^2\cos\varphi\right); \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega}.$$

2.49. Равномерное движение по дуге окружности радиуса $\frac{v_0}{2\omega\sin\varphi}$, где ω — угловая скорость суточного вращения Земли.

2.50.

$$x = \frac{x_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}); \quad z = z_0 - \frac{gt^2}{2}; \quad N = mx_0\omega^2(e^{\omega t} - e^{-\omega t}).$$

2.52. Если начальная относительная скорость точки v_0 не равна нулю, точка будет двигаться в плоскости с постоянной скоростью v_0, описывая окружность радиуса $\frac{v_0}{2\omega}$. Если $v_0 = 0$, то точка останется неподвижной относительно плоскости.

2.53.

$$x = \frac{\omega^2 a}{k^2 - \omega^2}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\omega^2 - k^2}t - 1\right) \quad \text{при } k = \sqrt{\frac{c}{m}} < \omega;$$

$$x = \frac{\omega^2 a t^2}{2} \quad \text{при } k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \omega;$$

$$x = 2\frac{\omega^2 a}{\omega^2 - k^2}\sin^2\frac{\sqrt{k^2 - \omega^2}}{2}t \quad \text{при } k = \sqrt{\frac{c}{m}} > \omega.$$

2.54.

1) $a = g\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}$.

2.55.

$$OM = \frac{1}{2}\left(a - \frac{\sqrt{2}g}{\omega^2}\right)\left(e^{\frac{\sqrt{2}\omega t}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{2}\omega t}{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}g}{\omega^2}.$$

2.56.

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0;$$

$$\dot{\theta}^2 - \omega^2\sin^2\theta - \frac{2g}{R}\cos\theta = \text{const}.$$

2.57. С точностью до членов порядка ω^2 ускорение силы тяжести равно

$$g_1(\varphi) = g\left(1 - \frac{\omega^2 R\cos^2\varphi}{g}\right),$$

где g — ускорение силы тяжести на полюсе, φ — географическая широта места. Приближённо

$$g_1(\varphi) = 9{,}81\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{289}\right) \text{ м/с}^2.$$

2.58. Через

$$\frac{12}{\sin\theta}\left(\frac{1}{2} + k\right)$$

часов, где $k = 0, 1, 2, \ldots$.

2.63.

$$2\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{V''(\xi)}{m}}.$$

2.65.

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}}.$$

2.66.

$$t_2 - t_1 = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{4}\right) - \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{4}\right).$$

2.71.

$$\frac{Mr^2}{2}\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right).$$

2.72.

$$\frac{Ma^2}{3}.$$

2.73.

$$\frac{1}{12}M(3b^2+3c^2-a^2).$$

2.74.

$$\frac{M}{36}(a^2+b^2+c^2).$$

2.75.

$$\frac{M}{2}(a^2+b^2).$$

2.76.

$$\frac{2M}{5}\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}.$$

2.77.

$$A=B=\frac{M}{2}\left(R^2+\frac{5}{4}r^2\right),\quad C=M\left(R^2+\frac{3}{4}r^2\right).$$

2.79.

$$J_{\xi_i\xi_j}=J_i+m\left(\sum_{j=1}^{3}a_j^2-a_i^2\right),\quad J_{\xi_i\xi_k}=ma_ia_k,\quad i\neq k.$$

2.81.

1) $J_x=J_y=J_z=\dfrac{2Ma^2}{3}$;

2) $J_x=\dfrac{M(b^2+c^2)}{3}$, $J_y=\dfrac{M(a^2+c^2)}{3}$, $J_z=\dfrac{M(a^2+b^2)}{3}$;

3) $J_x=\dfrac{Mb^2}{3}$, $J_y=\dfrac{Ma^2}{3}$, $J_z=\dfrac{M(a^2+b^2)}{3}$;

4) $J_x=J_y=\dfrac{MR^2}{4}$, $J_z=\dfrac{MR^2}{2}$;

5) $J_x=J_y=M\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{H^2}{12}\right)$, $J_z=\dfrac{MR^2}{2}$;

6) $J_x=J_y=M\left(\dfrac{R_1^2+R_2^2}{4}+\dfrac{H^2}{12}\right)$, $J_z=\dfrac{M}{2}(R_1^2+R_2^2)$;

7) $J_x=J_y=J_z=\dfrac{2MR^2}{5}$;

8) $J_x=J_y=\dfrac{3M(4R^2+h^2)}{80}$, $J_z=\dfrac{MR^2}{5}$.

2.82.

$$J_{xy} = J_{zy} = 0, \quad J_{xz} = (J_{z_1} - J_{x_1})\frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{Mr^2}{8}\sin^2\alpha.$$

2.83.

$$J_{xy} = J_{zy} = 0, \quad J_{xz} = \frac{M}{2}\left(\frac{r^2}{4} + a^2\right)\sin 2\alpha.$$

2.84.

$$J_{yz} = \frac{M}{12}\frac{ab(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}.$$

2.85. Эллипс с полуосями $\frac{M}{M+m}R$ и R.

2.86. 1) Гармонические колебания с амплитудой

$$A = \frac{l(M_2 + 2M_3)}{M_1 + M_2 + M_3}$$

и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$;

2) $\omega > \sqrt{\frac{M_1 + M_2 + M_3}{M_2 + 2M_3} \cdot \frac{g}{l}}$;

3) $l\omega^2(M_2 + 2M_3)$.

2.87. Центр обруча и жук описывают концентрические окружности радиусов

$$\frac{m}{m+M}a \quad \text{и} \quad \frac{M}{m+M}a$$

соответственно. Центр окружностей лежит на отрезке, соединяющем центр обруча и жука в начальном положении, и делит его на части, обратно пропорциональные их массам.

2.88.

$$\omega = \omega_0\frac{4M + 3m}{4(M + 3m)}.$$

2.89.

$$\omega = \sqrt{\frac{2MghJ}{J^2 + 4k^2}\left(e^{-\frac{\pi k}{J}} + \frac{2k}{J}\right)}.$$

2.90.

$$v_1 = m_2\sqrt{\frac{2k}{a(m_1 + m_2)}}, \quad v_2 = m_1\sqrt{\frac{2k}{a(m_1 + m_2)}}.$$

2.91.

$$\theta - \theta_0 = \sqrt{\frac{R^2 - l^2}{R^2 - l^2 + \frac{M}{m}(R^2 - \frac{2}{3}l^2)}} \cdot$$
$$\cdot \operatorname{arctg} \frac{at^2}{2\sqrt{R^2 - l^2 + \frac{M}{m}\left(R^2 - \frac{2}{3}l^2\right)}}.$$

2.92.

$$a = \frac{2g}{3}, \quad \varepsilon = \frac{2g}{3r}, \quad T = \frac{mg}{3}, \quad R = 0.$$

2.93.

$$a = \frac{2g}{3}\sin\alpha, \quad R = Mg\sqrt{1 - \frac{8}{9}\sin^2\alpha}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha,$$

β — угол реакции с нормалью к наклонной плоскости.

2.94.

$$a = \frac{2g\sin\alpha - a_0}{3}, \quad T = M\frac{g\sin\alpha + a_0}{3}.$$

2.95.

$$a = 2g\sin\alpha, \quad T = Mg\sin\alpha.$$

2.96.

$$\omega^2 = \frac{2ag(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}{r^2 + a^2 + k^2 - 2ar\cos\varphi}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{(r-a)^2 + k^2}{ag}}.$$

2.97.

$$a = \frac{4Q}{4M + 3m}.$$

2.98.

$$v_B = \sqrt{g\frac{(h-y)(4l^2 - y^2)}{l^2 + \rho^2}}.$$

2.99.

1) Эллипс с полуосями d и $2d$;

2) $v_C = \sqrt{6g\dfrac{(d^2 - y^2)(y_0 - y)}{4d^2 - 3y^2}}$;

3) $R_A = \dfrac{4}{7}Mg$.

2.100.

$$\cos\varphi = \sqrt{1+n^2} - n, \quad \text{где} \quad n = \frac{v_0^2}{6gl}.$$

2.101. $\frac{3}{2}$.

2.102.

$$R_x = \frac{Mgl^2}{k^2}(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)\sin\varphi,$$

$$R_y = \frac{Mgl^2}{k^2}((3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)\cos\varphi - 1) + Mg,$$

$$R_r = Mg\cos\varphi + \frac{2Mgl^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}{k^2},$$

$$R_p = Mg\frac{k^2 - l^2}{k^2}\sin\varphi.$$

2.103.

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l^2+k^2}{gl}}.$$

2.104. При $\sin\alpha \leqslant \frac{Mg}{S}$ закон движения

$$x = \frac{S}{M}\frac{R(R\cos\alpha - r)}{2(\rho^2 + R^2)}t^2.$$

При $\cos\alpha > \frac{r}{R}$ каток катится вправо, при $\cos\alpha < \frac{r}{R}$ — влево.

2.105.

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)},$$

$$N_A = \frac{3}{4}Mg(3\sin\varphi - 2\sin\varphi_0)\cos\varphi,$$

$$N_B = \frac{1}{4}Mg(1 - 6\sin\varphi\sin\varphi_0 + 9\sin^2\varphi).$$

Стержень отойдёт от стены при $\sin\varphi = \frac{2}{3}\sin\varphi_0$.

2.106.

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}\left(1 - \frac{1}{9}\sin^2\varphi_0\right)\sin\varphi_0}, \quad v_A = \frac{1}{3}\sin\varphi_0\sqrt{gl\sin\varphi_0}.$$

2.107.

$$S = \frac{Mg}{4}.$$

2.108.

$$S = \frac{2\sqrt{3}}{13} M g.$$

2.109.

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{7R}}, \quad \alpha = \arccos\frac{4}{7}.$$

2.110.

$$a_1 = g\frac{(3M_1 + 2M_2)\sin\alpha - M_2 \sin\beta}{3(M_1 + M_2)},$$

$$a_2 = g\frac{M_1 \sin\alpha - (3M_1 + 2M_2)\sin\beta}{3(M_1 + M_2)},$$

$$T = \frac{M_1 M_2 g(\sin\alpha + \sin\beta)}{3(M_1 + M_2)}.$$

2.111.

$$\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi} - \frac{2}{3}\rho\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3}g\cos\varphi,$$

$$(\rho^2\dot{\varphi})^{\cdot} - R\rho\dot{\varphi}^2 = -g\rho\sin\varphi,$$

$$\frac{3}{2}R^2\left(\frac{\dot{\rho}}{R} - \dot{\varphi}\right)^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 - 2g(\rho\cos\varphi - R\sin\varphi) = \text{const}.$$

2.112. Пусть (x, y) — координаты центра масс стержня, а θ — угол, который образует стержень с осью Ox. Тогда

$$x = c_1 t + c_2, \quad y = c_3 \sin(kt + c_4), \quad \ddot{\theta} = -k^2 \sin\theta\cos\theta,$$

где c_1, c_2 и c_3 — произвольные постоянные.

2.113.

$$a = \frac{mg\sin 2\alpha}{3(m + M) - 2m\cos^2\alpha}.$$

2.114. $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

2.115.

$$\omega = \frac{2\cos\alpha}{R}\sqrt{\frac{2ghn}{\mu(\mu - 2\cos^2\alpha)}}, \quad v = \sqrt{\frac{2ghn\mu}{\mu - 2\cos^2\alpha}},$$

где

$$\mu = \frac{M + 2m}{m}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\pi R}.$$

2.116. В неподвижной декартовой системе, имеющей начало в центре инерции системы, положение диска зададим координатами ξ

и η его центра масс и углом φ поворота диска. В этих координатах уравнения движения имеют вид

$$\varphi = \frac{\beta}{2R}t^2,$$
$$\xi = -\frac{mR}{m+M}\cos\frac{\alpha+\beta}{2R}t^2, \quad \eta = -\frac{mR}{m+M}\sin\frac{\alpha+\beta}{2R}t^2,$$

где

$$\beta = -\frac{mM\alpha R^2}{((m+M)J + mMR^2)}, \quad J = \frac{MR^2}{2}.$$

2.117.

$$a = \frac{(m+M)\sin 2\alpha}{3M + m(1+2\sin^2\alpha)}g, \quad N = \frac{(m+M)(3M+m)\cos\alpha}{3M + m(1+2\sin^2\alpha)}g.$$

2.118.

$$\mathbf{K} = \frac{MR^2}{4}\omega\sin\alpha\mathbf{e}_\xi + \frac{MR^2}{2}\omega\cos\alpha\mathbf{e}_\eta,$$

где $\mathbf{e}_\eta$ — нормаль к плоскости диска, $\mathbf{e}_\xi$ — единичный вектор, лежащий в плоскости, определяемой осью вращения и вектором $\mathbf{e}_\eta$, и перпендикулярный к $\mathbf{e}_\eta$.

2.119.

$$K_O = \frac{m\omega}{4}\sqrt{R^4\cos^2\alpha + 4(R^2+2e^2)^2\sin^2\alpha};$$

вектор $\mathbf{K}_O$ составляет с плоскостью диска угол β такой, что

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2(R^2+2e^2)}{R^2}\operatorname{tg}\alpha.$$

2.120. Горизонтальные составляющие реакций равны

$$N_A = N_B = \frac{MR^2\omega^2}{8l}\sin 2\alpha,$$

лежат в плоскости, проходящей через Oz и нормаль к плоскости диска.

2.121.

$$\mathbf{K} = \left(\frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{12}\right)\omega\sin\alpha\mathbf{e}_\xi + \frac{MR^2}{2}\cos\alpha\mathbf{e}_\eta,$$

где $\mathbf{e}_\xi$ направлен вдоль оси цилиндра, а $\mathbf{e}_\eta$ лежит в плоскости, определяемой осью вращения и вектором $\mathbf{e}_\xi$, и перпендикулярен последнему.

2.122. Горизонтальные составляющие реакций равны

$$N_A = N_B = \frac{M\omega^2 \sin 2\alpha}{2h}\left(\frac{l^2}{3} - \frac{r^2}{4}\right),$$

противоположны по направлению и лежат в плоскости $Oz\zeta$.

2.123.

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

2.124. $\omega_2 = 2\omega_1$.

2.125. $\omega_2 = \omega_1\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}$; $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$.

2.126.

$$m = \frac{J\omega\omega_1 \sin\varphi}{ga}.$$

2.127.

$$F \approx \frac{P^3 z_C^3}{J^2 g\omega^2}\sin\theta.$$

2.128. В обоих случаях реакция равна

$$\mathbf{R} = -m\mathbf{g}\frac{r^2}{2l^2 + r^2}.$$

2.129.

$$s = \frac{M}{2k}\ln\left(1 + \frac{kv_0^2}{Mgf}\right).$$

2.130. $v_0^2 = rg\,\mathrm{sh}(4f\pi)$.

2.131.

$$v^2 = \frac{2gr}{1 + 4f^2}(1 - 2f^2 - 3fe^{-f\pi}).$$

2.132.

$$s = \frac{v_0^2}{2g(f\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

2.133.

$$f = \frac{v_0^2}{2gs}.$$

2.134.

$$v_0 \leqslant \sqrt{\frac{2gR}{1 + 4f^2}\left(\sqrt{1 + f^2}e^{-2f\varphi_0} - (1 - 2f^2)\right)}, \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = f.$$

2.135.

$$v_0 \geqslant \sqrt{\frac{gR}{1+4f^2}(2(1-2f^2)+3e^{2\pi f})}.$$

2.136. Движение по винтовой линии возможно при условии

$$\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1+(f'(r_0)\cos\alpha)^2} = 0,$$

где $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{r_0}$. Скорость движения равна $v = \sqrt{gr_0 f'(r_0)}$.

2.137.

$$1)\ x = x_0\cos\left(\sqrt{\frac{fg}{l}}t\right); \quad 2)\ f = \frac{4\pi^2 l}{gT^2}.$$

2.138. При условии, что $\operatorname{tg}\alpha > f$. Скорость равна

$$v = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\sin\alpha + f\cos\alpha}}.$$

2.139.

$$a = 3g\frac{F - f(m+M)}{3M+m}.$$

2.140.

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{k^2+r^2}{k^2}f.$$

2.141.

$$s = \frac{rv^2(2M_1+M_2)}{2(m-(M_1f_к + fM_2r)g)}.$$

2.142.

$$\omega = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{m - M_2gr(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{M_1+2M_2}\cdot\varphi}.$$

2.143.

$$m \leqslant fMg\frac{r^2+\rho^2}{r}.$$

2.144.

$$m \leqslant fMg\frac{r^2+\rho^2}{r} + Mgf_к.$$

2.145.

$$F \leqslant fMg\frac{r^2+\rho^2}{\rho^2}.$$

2.146.

$$F \leqslant Mg\frac{f(r^2+\rho^2)-f_{\text{к}}r}{\rho^2}.$$

2.147.

$$\frac{fgt}{2}.$$

2.148.

$$\frac{fgt}{4}.$$

2.149. $\alpha > \operatorname{arctg} 3f$, $a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$.

2.150.

$$s = \frac{3rv_0^2}{4\delta g}.$$

2.151.

$$s = \frac{v_0^2}{2g}\frac{5k+\delta+4rf}{\left(3\frac{\delta}{r}+f\right)k+4\delta f}; \quad k^2 = l^2 - r^2.$$

2.152. Цилиндр катится с проскальзыванием, его центр масс движется с ускорением

$$a = g\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi},$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} f$ — угол трения; угловое ускорение цилиндра

$$\varepsilon = \frac{fgr}{k^2}\cos\alpha.$$

Рекомендуемая литература

[1] *Антонов И. Л.* «Избранные задачи теоретической механики». Изд-во Московского Университета, 1986.

[2] *Аппель П.* «Теоретическая механика», тт. I, II. М.: Физматгиз, 1960.

[3] *Арнольд В. И.* «Математические методы классической механики». М.: «Наука», 1979.

[4] *Барбашова Т. Ф., Кугушев Е. И., Попова Т. В.* «Теоретическая механика в задачах». М.: Изд-во попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2010.

[5] *Берёзкин Е. Н.* «Курс теоретической механики». М.: Изд-во МГУ, 1974.

[6] *Берёзкин Е. Н.* «Решение задач по теоретической механике», ч. I, II, III. М.: изд-во МГУ, 1973, 1974, 1977.

[7] *Болотин С. В., Карапетян А. В., Кугушев А. И., Трещёв Д. В.* «Теоретическая механика». М.: Издательский центр «Академия», 2010.

[8] *Бражниченко Н. А., Кан В. Л., Минцберг Б. Л., Морозов В. И.* «Сборник задач по теоретической механике». Л.: Судпромгиз, 1962.

[9] *Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р.* «Курс теоретической механики». тт. I, II. М.: Наука, 1970.

[10] *Бухгольц Н. Н.* «Основной курс теоретической механики», ч. I, II. М.: «Наука», 1969.

[11] *Бухгольц Н. Н., Воронков И. М., Минаков А. П.* «Сборник задач по теоретической механике», М. — Л.: ГИЗТТЛ, 1949.

[12] *Вильке В. Г.* «Теоретическая механика». М.: «Лань», 2003.

[13] *Гантмахер Ф. Р.* «Лекции по аналитической механике». М.: «Наука», 1966.

[14] *Голубев Ю. Ф.* «Основы теоретической механики». М.: Изд-во МГУ, 2000.

[15] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* «Механика», т. I. М: «Наука», 1965.

[16] *Лурье А. И.* «Аналитическая механика». М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1961.

[17] *Маркеев А. П.* «Теоретическая механика». М. — Ижевск: РХД, 2001.

[18] *Мещерский И. В.* «Сборник задач по теоретической механике». М.: «Наука», 1981.

[19] *Пятницкий Е. С., Трухан Н. М., Ханукаев Ю. И., Яковенко Г. Н.* «Сборник задач по аналитической механике». М.: «Наука», 1981.

[20] *Суслов Г. К.* «Теоретическая механика». М. — Л.: ОГИЗ, 1946.

[21] *Татаринов Я. В.* «Лекции по классической механике». М.: Изд-во Московского Университета, 1984.

[22] *Четаев Н. Г.* «Теоретическая механика». М.: «Наука», 1987.

[23] «Задачи по классической механике». М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2001.

ЗАДАЧНИК ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
Под ред. К. Е. Якимовой

Оригинал-макет: А. Н. Швец

Издано 07.11.2017.
Формат 60×90 $\frac{1}{16}$.
Гарнитура PT Serif.
Электронное издание.
Git hash: `d30a7ce0fa2cf6ec35bc32c5540fb28ea7ff8c12`

МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет,
кафедра теоретической механики и мехатроники.
119234, г. Москва, ГСП-1, ул. Ленинские горы, д. 1,
МГУ имени М. В. Ломоносова, к. 1617.