

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА



МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ЗАДАЧНИК ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

издание третье

Москва, 2017

ЗАДАЧНИК ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ / Т. В. Сальникова, К. Е. Якимова (составители). Под ред. К. Е. Якимовой. — 3-е изд. — М.: МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический ф-т, каф. теоретической механики и мехатроники, 2017. — 88 стр.

Данный задачник соответствует курсам лекций по классической и аналитической механике, читаемым кафедрой теоретической механики и мехатроники на механико-математическом факультете МГУ.

Предлагается преподавателям и студентам университетов.

В третьем издании исправлены обнаруженные ошибки и неточности.

Оглавление

Предисловие	4
1 Аналитическая статика	5
2 Уравнения Лагранжа второго рода. Уравнения Рауса	16
3 Малые колебания	28
4 Канонические уравнения Гамильтона. Метод Якоби	39
5 Канонические преобразования. Скобки Пуассона	50
Ответы	58
Рекомендуемая литература	85

Предисловие

Предлагаемый сборник задач соответствует лекционным курсам по теоретической механике, которые читаются на механико-математическом факультете МГУ многие годы.

Он возник как результат обсуждений задачника «Классическая и аналитическая механика» [13] на заседаниях методического семинара кафедры теоретической механики и мехатроники в 2001—2002 гг.

В отличие от сборника «Задачи по аналитической механике» [2] он составлен в соответствии с разделами 3 и 4 [13] и содержит ответы.

Существенной особенностью этого задачника является другая разбивка по разделам, что позволяет избежать повторений при описании исследуемых механических систем.

Каждому разделу предпослано краткое теоретическое введение. Тексты введений взяты в основном из сборника [2] и отредактированы в соответствии с содержанием раздела.

При составлении задачника составители неоднократно советовались с И. Л. Антоновым, В. Г. Вильке, А. В. Карапетяном, А. С. Кулешовым, Я. В. Татариновым, Д. В. Трещёвым и др.

1. Аналитическая статика

Рассмотрим систему N материальных точек, на которую наложены двусторонние (удерживающие) связи, заданные независимыми уравнениями

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, l, \quad l < 3N \quad (1.1)$$

Эти уравнения в $3N$ -мерном пространстве в каждый момент времени задают поверхность размерности $3N - l$. Число $n = 3N - l$ называется *числом степеней свободы* системы.

Возможным (виртуальным) перемещением системы называется любой набор векторов

$$\delta \mathbf{r}_\nu = (\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu), \quad \nu = 1, \dots, N,$$

удовлетворяющих условиям:

$$\sum_{\nu=1}^N \left(\frac{\partial f_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial f_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \frac{\partial f_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)}{\partial z_\nu} \delta z_\nu \right) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, l.$$

Связи называются *идеальными (гладкими)*, если на любом возможном перемещении системы выполняется соотношение:

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{R}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu = 0, \quad (1.2)$$

где \mathbf{R}_ν — равнодействующая реакций связей, приложенных к ν -ой точке.

Условие (1.2) означает, что сумма элементарных работ реакций связей на любом возможном перемещении системы равна нулю.

Положением равновесия системы материальных точек называется такое её положение \mathbf{r}_ν^0 , $\nu = 1, \dots, N$, в котором она будет оставаться всё время, если в начальный момент она находилась в этом положении и скорости всех её точек были равны нулю.

Если \mathbf{F}_ν , $\nu = 1, \dots, N$ — равнодействующие заданных (активных) сил, приложенных к точкам системы, на которую наложены идеальные связи (1.1), необходимым и достаточным условием равновесия

системы является

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \delta \mathbf{r}_v = 0. \quad (1.3)$$

То есть для того, чтобы некоторое (совместимое со связями (1.1)) положение системы было положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении сумма элементарных работ заданных сил на любом возможном перемещении системы равнялась нулю (принцип возможных перемещений).

В независимых переменных q_1, \dots, q_n (обобщённых координатах) уравнение (1.3) примет вид:

$$\sum_{\alpha=1}^n Q_\alpha \delta q_\alpha = 0, \quad (1.4)$$

где

$$Q_\alpha = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_\alpha};$$

величины Q_α , $\alpha = 1, \dots, n$ называются *обобщёнными силами*.

Поскольку $\delta q_1, \dots, \delta q_n$ независимы, из (1.4) следуют уравнения равновесия:

$$Q_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Обобщённая сила, соответствующая координате q_k , может быть найдена следующим образом.

Пусть $\delta \mathbf{r}^{(k)} = (\delta \mathbf{r}_1^{(k)}, \dots, \delta \mathbf{r}_N^{(k)})$ возможное перемещение, обусловленное изменением только одной обобщённой координаты q_k ($\delta q_k > 0$, $\delta q_j = 0$, $j \neq k$).

Тогда элементарная работа заданных сил на этом перемещении может быть представлена так:

$$A(\delta \mathbf{r}^{(k)}) = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \delta \mathbf{r}_v^{(k)} = Q_k \delta q_k.$$

Отсюда

$$Q_k = \frac{A(\delta \mathbf{r}^{(k)})}{\delta q_k}.$$

Если заданные силы допускают силовую функцию U ,

$$Q_\alpha = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha},$$

где V — потенциальная энергия системы.

Уравнения равновесия в этом случае принимают вид

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

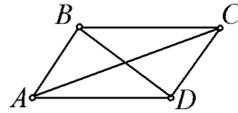
Таким образом, в положении равновесия потенциальная энергия имеет экстремум. Особый интерес представляют устойчивые положения равновесия. Положение равновесия называется устойчивым, если при достаточно малых начальных отклонениях и достаточно малых начальных скоростях система за всё время движения не выходит за пределы сколь угодно малой (наперёд заданной) окрестности положения равновесия, имея при этом сколь угодно малые скорости.

Достаточное условия устойчивости положения равновесия даёт *теорема Лагранжа — Дирихле*: если в положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий минимум, это положение равновесия устойчиво.

Таким образом, вопрос об устойчивости положения равновесия сводится к изучению характера экстремума потенциальной энергии.

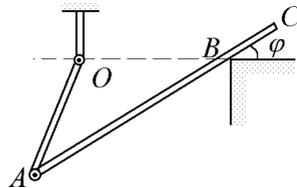
1.1. Противоположные вершины шарнирного параллелограмма $ABCD$ связаны нитями AC и BD , натяжения которых равны S_1 и S_2 . Доказать, что при равновесии выполняется соотношение

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AC}{BD}.$$



1.2. Найти угол φ , определяющий положение равновесия системы, состоящей из двух однородных стержней OA и AC , изображённой на чертеже. Даны:

$$AC = 2a, \quad AO = OB = a.$$

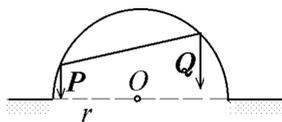


Вес стержня AO равен P , вес AC равен $2P$. Сколько ответов имеет

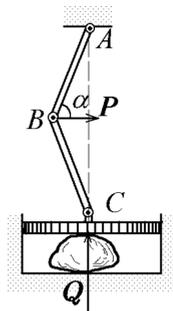
задача?

1.3. Шарик положен в гладкую трубку, расположенную в горизонтальной плоскости и имеющую форму эллипса с большой осью, равной $2a$, и притягивается к фокусам этого эллипса силами, обратно пропорциональными квадрату расстояний до соответствующих фокусов, причём коэффициент пропорциональности для одного фокуса равен k^2 , а для другого k_1^2 . Определить радиусы-векторы r и r_1 в положении равновесия шарика.

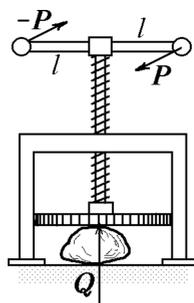
1.4. На вертикальную проволочную полуокружность радиуса r нанизаны два шарика веса P и Q , связанных нерастяжимой нитью длины $2l$. Найти положение равновесия (угол α нити с горизонтом).



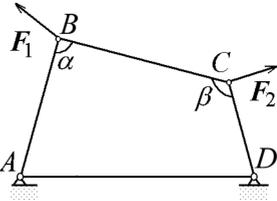
1.5. В точке B коленчатого пресса в плоскости ABC приложена сила P . Какая сила Q , приложенная в точке C и направленная по прямой CA , уравнивает эту силу P ? ($AB = BC$, $\angle ABC = 2\alpha$).



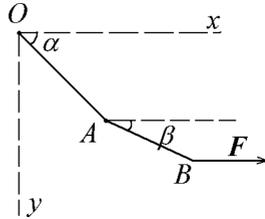
1.6. Найти условие равновесия сил в изображённом на чертеже прессе, если силы P и $-P$ направлены перпендикулярно к ручке и оси винта, l — длина каждой ручки, h — шаг винта.



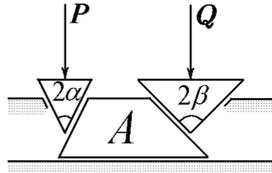
1.7. Плоский шарнирный четырёхзвеник $ABCD$ поставлен на звено AD . В точке B приложена сила F_1 , перпендикулярная к звену AB , а в точке C — сила F_2 , перпендикулярная к CD . Найти зависимость между величинами сил F_1 и F_2 при равновесии, если углы α и β известны.



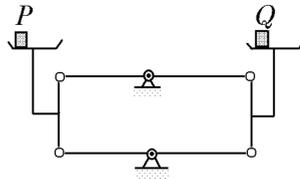
1.8. Однородный стержень OA массы M_1 может вращаться вокруг неподвижной точки O в вертикальной плоскости. Концы A и B этого стержня соединены шарнирно с другим однородным стержнем AB массы M_2 . К концу B второго стержня приложена горизонтальная сила F . Найти углы α и β стержней с горизонталью при равновесии. Стержни расположены в одной плоскости.



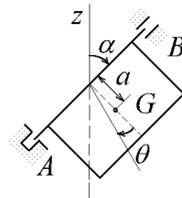
1.9. Тело A , лежащее на горизонтальной плоскости BC , находится между двумя равнобедренными клиньями с углами 2α и 2β . На первый клин действует вертикальная сила P ; на второй клин вертикальная сила Q . Найти зависимость между этими силами при равновесии.



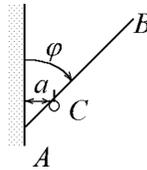
1.10. Показать, что условием равновесия на весах Роберваля (см. рисунок) является равенство $P = Q$ независимо от положения грузов на чашах весов.



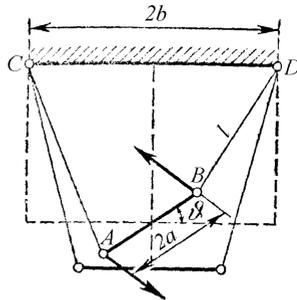
1.11. Ось вращения AB прямоугольной пластины наклонена под углом α к вертикали. Определить момент сил M относительно оси AB , который нужно приложить к пластине, чтобы в положении равновесия она составляла угол θ с плоскостью ABz . Масса пластины m , расстояние от центра масс G пластины до оси AB равно a .



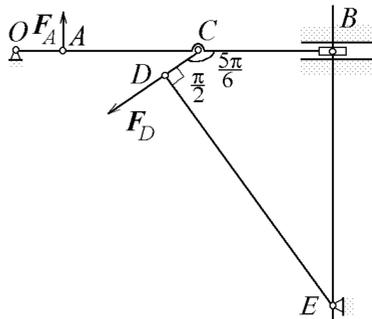
1.12. Прямолинейный однородный стержень AB длины $2l$ упирается нижним концом A в вертикальную стену, составляя с ней угол φ . Стержень опирается также на гвоздь C , параллельный стене. Гвоздь отстоит от стены на расстоянии a . Определить угол φ в положении равновесия стержня.



1.13. К однородному стержню AB длины $2a$ и веса Q , подвешенному на двух нитях длины l каждая, приложена пара сил с моментом M . Точки подвеса нитей, расположенные на одной горизонтали, находятся на расстоянии $2b$ друг от друга. Найти угол θ , определяющий положение равновесия стержня.

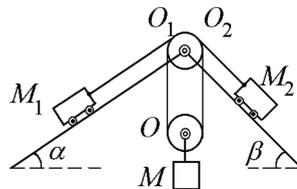


1.14. Кривошипно-ползунный механизм OAB связан в середине шатуна AB цилиндрическим шарниром C со стержнем CD . Стержни CD и DE соединены цилиндрическим шарниром D . Определить зависимость между модулями сил F_A и F_D , соответственно перпендикулярных стержням OA и DE , при равновесии механизма в положении, указанном на рисунке. Все стержни находятся в одной плоскости. Дано:



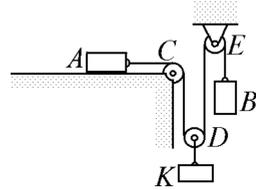
$$\angle DCB = \frac{5\pi}{6}, \quad \angle CDE = \frac{\pi}{2}.$$

1.15. Найти массы M_1 и M_2 двух грузов, удерживаемых в равновесии грузом массы M на плоскостях, наклонённых к горизонту под углами α и β , если грузы M_1 и M_2 прикреплены к концам троса, идущего от груза с массой M_1 через блок O_1 , насаженный на горизонтальную ось, к по-

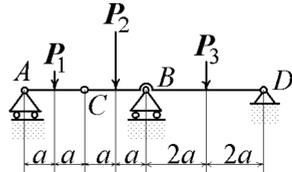


движному блоку O , и затем через блок O_2 , насаженный на ось блока O_1 , к грузу массы M_2 . Блоки O_1 и O_2 — соосные. Массами блоков и троса пренебречь.

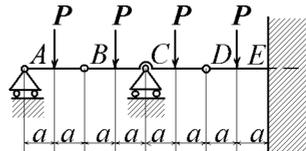
1.16. К концам нерастяжимой нити привязаны грузы A и B одинаковой массы. От груза A нить проходит параллельно горизонтальной плоскости, огибает неподвижный блок C , охватывает подвижный блок D , затем огибает неподвижный блок E , где к другому концу нити привязан груз B . К оси подвижного блока D подвешен груз K массы M . Определить массу M_1 каждого из грузов A и B и коэффициент трения скольжения f груза A о горизонтальную плоскость, если система грузов находится в равновесии. Массой нити пренебречь.



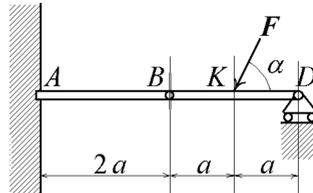
1.17. Составная балка AD , лежащая на трёх опорах, состоит из двух балок, шарнирно соединённых в точке C . На балку действуют вертикальные силы, равные $P_1 = 20$ кН, $P_2 = 60$ кН, $P_3 = 30$ кН. Размеры указаны на рисунке. Определить реакции опор A , B и D .



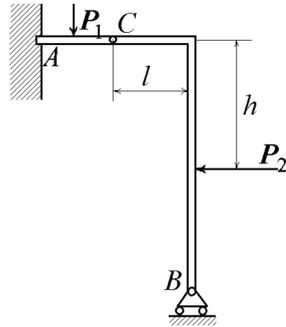
1.18. Составная балка AE , лежащая на двух опорах A и C , состоит из трёх балок AB , BD и DE , шарнирно соединённых концами в точках B и D . Балка DE в сечении E закреплена в стене. Определить вертикальную составляющую реакции в сечении E . К балкам приложены четыре равные вертикальные силы P . Размеры указаны на рисунке.



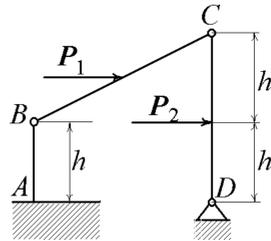
1.19. Две горизонтальные балки AB и BD соединены цилиндрическим шарниром B . Опора D стоит на катках, а сечение A закреплено в стенке. К балке BD в точке K приложена сосредоточенная сила F , образующая угол α с горизонтом. Размеры указаны на рисунке. Определить реакцию в закреплённом сечении A . Массой блока пренебречь.



1.20. Каркас платформы состоит из Г-образных рам с промежуточными шарнирами C . Верхние концы рам жёстко заземлены в вертикальную бетонную стену, нижние — опираются на цилиндрические подвижные опоры, которые могут перемещаться перпендикулярно стене. Определить вертикальную реакцию заземления при действии сил \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 .

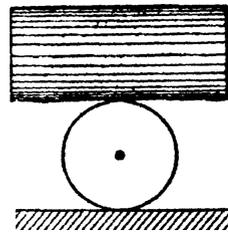


1.21. Две балки BC и CD шарнирно соединены в точке C , с помощью цилиндрического шарнира B прикреплены к вертикальной стойке AB , закреплённой в сечении A , а цилиндрическим шарниром D соединены с полом. К балкам приложены горизонтальные силы \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 . Определить горизонтальную составляющую реакции в сечении A . Размеры указаны на рисунке.

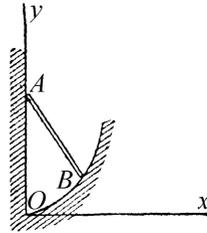


1.22. Определить момент m_A результирующей пары реакций, возникающих в заделке A стойки AB , рассмотренной в предыдущей задаче.

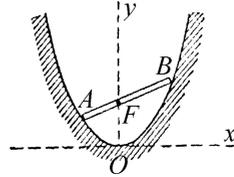
1.23. На неподвижный круглый цилиндр радиуса r , ось которого горизонтальна, положен однородный круглый цилиндр радиуса r_1 , ось которого также горизонтальна и перпендикулярна к оси первого цилиндра. В каком равновесии будет эта система: безразличном, устойчивом или неустойчивом?



1.24. Однородный стержень $AB = a$ опирается одним концом на гладкую вертикальную стену, а другим концом — на гладкий неподвижный профиль. Каков должен быть этот профиль, чтобы стержень в любом положении оставался в равновесии?



1.25. Однородный тяжёлый стержень длины l может скользить своими концами без трения по параболе $y = ax^2$. Определить возможные положения равновесия. (Ось y направлена по вертикали вверх, ось x — по горизонтали вправо.)



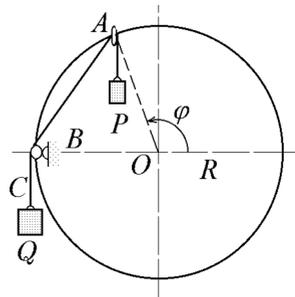
1.26. Однородный тяжёлый стержень длины l может скользить своими концами без трения по эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

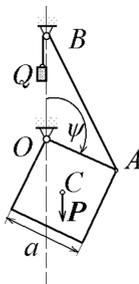
длина стержня $l < 2a$. Найти положения равновесия стержня. Ось y направлена вертикально вверх, x — по горизонтали вправо.

Указание. Ввести координату φ (эксцентрическую аномалию) с помощью соотношений $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$.

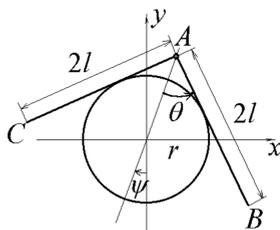
1.27. По гладкому проволочному кольцу радиуса R , расположенному в вертикальной плоскости, может скользить колечко A . К этому колечку на нити подвешен груз массы m_1 ; другая нить, перекинутая через малый блок B , расположенный на конце горизонтального диаметра кольца, имеет на конце C груз Q массы m_2 . Определить положения равновесия колечка A и исследовать, какие из них устойчивы.



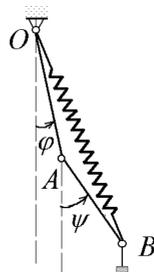
1.28. Однородная квадратная пластинка может вращаться в вертикальной плоскости вокруг оси, проходящей через угол O ; масса пластинки M , длина её стороны a . К углу A пластинки привязана нить длины l , перекинутая через малый блок B , отстоящий на расстоянии a по вертикали от точки O . На нити висит груз массы $M_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} M$. Определить положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.



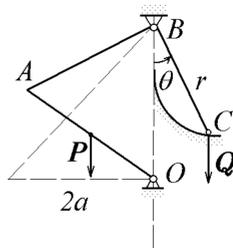
1.29. На гладкий цилиндр радиуса r опираются два однородных тяжёлых стержня, соединённых шарниром A . Длина каждого стержня равна $2l$. Определить угол раствора стержней θ и угол ψ , который составляет биссектриса угла между стержнями с вертикалью Oy в положении равновесия.



1.30. Стержень OA длины a может свободно вращаться вокруг точки O . К концу A стержня шарнирно прикреплен стержень AB длины a , на другом конце которого закреплен груз B массы m . Точка O и точка B соединены между собой пружиной жёсткости c . Длина пружины в ненапряжённом состоянии равна a . Найти положения равновесия, считая, что система расположена в вертикальной плоскости. Массами стержней AB и OA и пружины пренебречь.

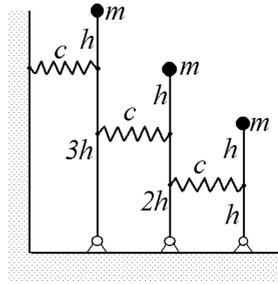


1.31. Подъёмный мост OA схематически изображён на рисунке в виде однородной пластины массы M и длины $2a$. К середине края пластины прикреплен канат длины l , перекинутый через малый блок, лежащий на вертикали на расстоянии $2a$ над точкой O . Другой конец C каната соединён с противовесом, скользящим без трения по криволинейной на-



правляющей. Определить форму этой направляющей и массу противовеса M_1 так, чтобы система находилась в безразличном равновесии. При горизонтальном положении моста противовес C находится на прямой OB .

1.32. Исследовать устойчивость вертикального положения равновесия системы маятников, изображённой на рисунке; длина стержня первого маятника $4h$, второго $3h$ и третьего $2h$. Массы всех маятников и жёсткости пружин одинаковы и соответственно равны m и c . Расстояния от точек крепления пружин до центров масс равны h . Массами стержней пренебречь, а массы m рассматривать как материальные точки; когда маятники находятся в вертикальном положении, пружины не напряжены.



2. Уравнения Лагранжа второго рода. Уравнения Рауса

Пусть на систему материальных точек с массами m_i и радиус-векторами \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, N$ наложены идеальные голономные связи. Тогда уравнения движения системы могут быть записаны в форме уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

где

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i(\dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)}{2} -$$

кинетическая энергия системы, q_j — обобщённые координаты, n — число степеней свободы (число независимых вариаций координат), Q_j — обобщённые силы.

Обобщённая сила, соответствующая k -ой координате, определяется следующим образом. Пусть $\delta \mathbf{r}_i$ обозначает произвольное возможное (виртуальное) перемещение i -ой точки, F_i — равнодействующую заданных сил, приложенных к ней, $\delta \mathbf{r} = (\delta r_1, \dots, \delta r_N)$, δq_j — вариацию j -ой обобщённой координаты, а $\delta \mathbf{r}_i^{(k)}$ — возможное перемещение i -ой точки, при следующих условиях:

$$\delta q_j = 0 \text{ для всех } j \neq k, \quad \delta q_k > 0, \quad \delta \mathbf{r}^{(k)} = (\delta r_1^{(k)}, \dots, \delta r_N^{(k)}).$$

Тогда

$$A(\delta \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i, \delta \mathbf{r}_i) = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j,$$
$$A(\delta \mathbf{r}^{(k)}) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i, \delta \mathbf{r}_i^{(k)}) = Q_k \delta q_k,$$

следовательно,

$$Q_k = \frac{A(\delta \mathbf{r}^{(k)})}{\delta q_k}.$$

Если существует функция U такая, что

$$A(\delta \mathbf{r}) = \delta U(\mathbf{r}, t),$$

говорят, что заданные силы, действующие на систему, имеют силовую функцию U . В этом случае

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, n$$

и можно ввести функцию Лагранжа $L = T + U$, с помощью которой уравнения Лагранжа второго рода могут быть приведены к виду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Если

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,$$

то обобщённая координата q_k называется *циклической*. В этом случае система (2.2) имеет первый интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \beta_k = \text{const},$$

который также называется *циклическим*.

Если

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

то имеет место первый интеграл

$$\sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = h = \text{const},$$

называющийся *обобщённым интегралом энергии* или *интегралом Якоби*.

Функцию Лагранжа L можно представить в виде суммы

$$L = L_2 + L_1 + L_0,$$

где каждое слагаемое — однородная форма $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ соответствующей степени. Тогда последний первый интеграл примет вид

$$L_2 - L_0 = h.$$

Если

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

и, кроме того, кинетическая энергия системы является квадратичной формой относительно обобщённых скоростей, то оказывается справедливым соотношение $T = U + h$ — интеграл энергии, т. е. выполняется закон сохранения полной механической энергии.

Пусть координаты q_k , $k = s+1, \dots, n$ — циклические. Рассматривая циклические интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \beta_k, \quad k = s+1, \dots, n$$

как уравнения относительно \dot{q}_k и разрешая их, получим

$$\dot{q}_k = f_k(t, q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n), \quad k = s+1, \dots, n.$$

Функция Рауса определяется следующим образом:

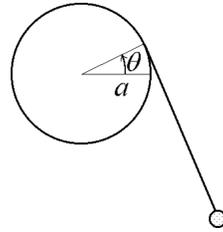
$$\begin{aligned} R(t, q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n) = \\ = \left(L - \sum_{k=s+1}^n \beta_k \dot{q}_k \right) \Big|_{\dot{q}_k \rightarrow f_k(t, q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n)}. \end{aligned}$$

Уравнения движения могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, s, \\ \dot{q}_k = -\frac{\partial R}{\partial \beta_k}, \quad k = s+1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.3}$$

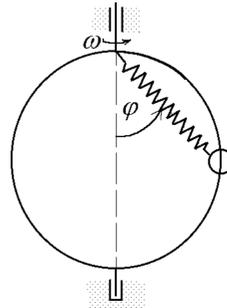
Уравнения (2.3) называются *уравнениями Рауса*.

2.1. Составить уравнение движения маятника, состоящего из материальной точки M массы m , подвешенной на нерастяжимой нити, намотанной на неподвижный цилиндр радиуса a , ось которого горизонтальна и нормальна к плоскости движения маятника. Длина свисающей в положении равновесия части нити равна l . Массой нити пренебречь.

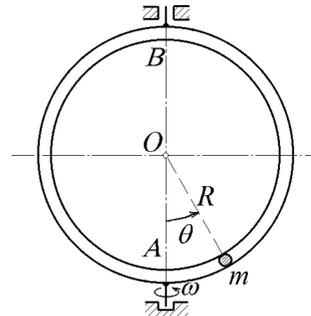


2.2. Точка подвеса маятника, состоящего из материальной точки массы m , подвешенной на нерастяжимой невесомой нити длины l , движется по заданному закону $\xi = \xi_0(t)$ по наклонной прямой, образующей угол α с горизонтом. Составить уравнение движения маятника, если он движется в вертикальной плоскости, содержащей указанную прямую.

2.3. Гладкое проволочное кольцо радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего вертикального диаметра. На кольцо надета бусинка массы m , соединённая с наивысшей точкой кольца пружиной жёсткости c , как показано на рисунке. Составить уравнение движения бусинки (длина пружины в ненапряжённом состоянии равна l).



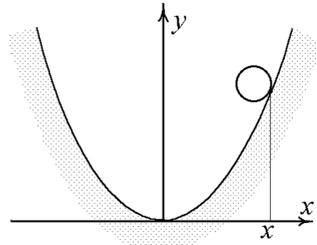
2.4. Материальная точка массы m движется по круговой рамке радиуса R , которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикального диаметра AB . Составить уравнение движения точки, найти его первый интеграл и определить момент сил M , необходимый для поддержания постоянства угловой скорости ω .



2.5. Однородный диск радиуса R и массы m может катиться без проскальзывания по параболе

$$y = \frac{ax^2}{2}.$$

Ось Oy вертикальна, причём $Ra < 1$. Составить функцию Лагранжа, приняв за обобщённую координату абсциссу x точки касания.

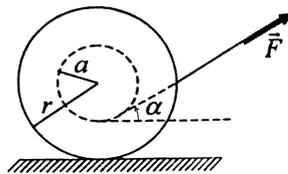


2.6. Твёрдое тело, находившееся в покое, приводится во вращение вокруг неподвижной вертикальной оси парой сил с постоянным моментом, равным M ; при этом возникает момент сил сопротивления M_1 , пропорциональный квадрату угловой скорости вращения твёрдого тела: $M_1 = \alpha\omega^2$. Найти закон изменения угловой скорости; момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения равен J .

2.7. Решить предыдущую задачу в предположении, что момент сил сопротивления M_1 пропорционален угловой скорости вращения твёрдого тела: $M_1 = \alpha\omega$.

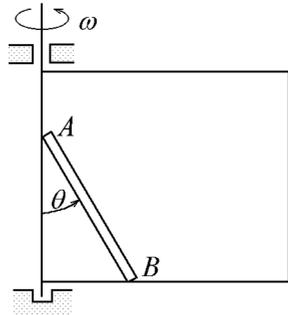
2.8. Определить, с какой угловой скоростью ω упадёт на землю спеленное дерево массы M , если его центр масс C расположен на расстоянии h от основания, а момент сил сопротивления воздуха $m_{cz} = -\alpha\dot{\varphi}^2$, где $\alpha = \text{const}$. Момент инерции дерева относительно оси z , совпадающей с осью, вокруг которой поворачивается дерево при падении, равен J .

2.9. На барабан однородного катка массы m и радиуса r , лежащего на горизонтальной шероховатой плоскости, намотана нить, к которой приложена сила F под углом α к горизонту. Радиус барабана a , центральный радиус инерции катка ρ . На каток действует трение качения, пропорциональное его мгновенной угловой скорости $-\epsilon\omega$. Найти движение катка.



2.10. Однородный стержень длины l и массы m скользит концом A по вертикальной прямой Oy , а концом B по горизонтали Ox . В точке A приложена сила $F(t)e_y$, а в точке B — вязкое трение $-\epsilon v_B$. Написать уравнение движения стержня.

2.11. Концы однородного тяжёлого стержня AB длины $2a$ и массы M скользят без трения по горизонтальной и вертикальной сторонам рамки, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной стороны. 1) Составить уравнение движения стержня, найти его первый интеграл. 2) Определить составляющую реакции в точке A , лежащую в плоскости рамки, если в начальный момент стержень относительно рамки находился в покое и $\theta = \theta_0$.

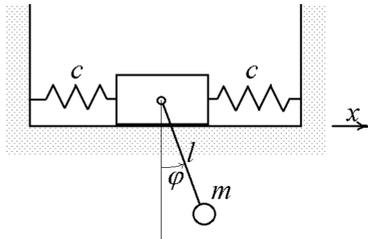


2.12. Составить уравнение движения материальной точки массы m , подвешенной на упругой нити жёсткости c . Длина нити в положении равновесия равна l . Точка движется в вертикальной плоскости, проходящей через точку подвеса.

2.13. В цилиндрических (λ, ρ, z) и сферических (θ, φ, r) координатах записать функции Лагранжа и Рауса, а также первые интегралы уравнений движения сферического маятника, т. е. точки, движущейся по гладкой сфере радиуса a в однородном поле силы тяжести. Начало координат поместить в центр сферы.

2.14. Материальная точка массы m движется по сфере радиуса l . На неё действует только вязкое трение, пропорциональное её скорости. Написать уравнение движения точки в сферических координатах. Описать свойства такого движения.

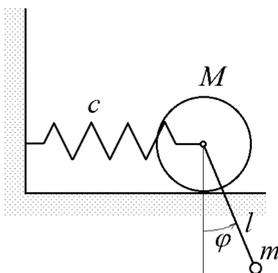
2.15. Брусок массы M , соединённый с неподвижными стенками одинаковыми пружинами жёсткости c , может скользить без трения вдоль горизонтальной направляющей. К центру бруска на нерастяжимой нити длины l подвешен груз массы m . Составить уравнения движения.



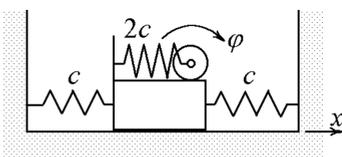
2.16. Груз массы m , подвешенный на пружине жёсткости c , может двигаться по вертикальным направляющим без трения. В центре масс груза шарнирно прикреплен однородный стержень массы M и

длины $2l$. Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа, если стержень во время движения не выходит из вертикальной плоскости.

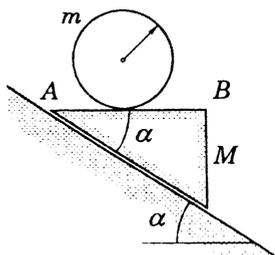
2.17. Составить уравнения движения системы, состоящей из диска, который может катиться без проскальзывания по горизонтальной прямой Ox , и маятника массы m и длины l , точка подвеса которого находится в центре диска массы M . Центр диска соединён с неподвижной стенкой пружиной жёсткости c .



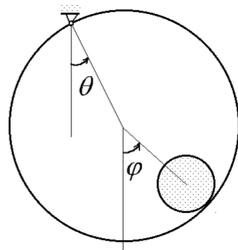
2.18. Доска массы m , соединённая пружинами жёсткости c с неподвижными стенками, может скользить по гладкому горизонтальному полу. По доске может катиться без проскальзывания диск массы $\frac{m}{2}$ и радиуса r , центр которого соединён с краем доски пружиной жёсткости $2c$. Найти общее решение уравнений движения системы.



2.19. Прямоугольный клин массы M и с углом α при вершине A может скользить без трения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. По стороне AB клина может катиться без проскальзывания однородный круглый цилиндр радиуса r и массы m . Найти величину ускорения оси цилиндра относительно клина и реакцию наклонной плоскости.

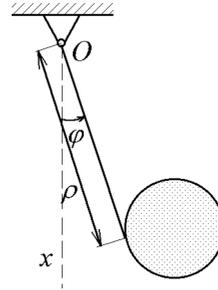


2.20. Внутри полого цилиндра массы M и радиуса R , который может свободно качаться вокруг своей горизонтальной образующей, катится без проскальзывания однородный цилиндр массы m и радиуса r . Составить уравнения движения системы.

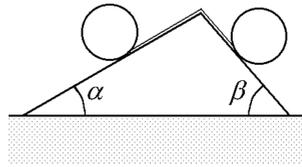


2.21. Найти ускорение тележки, по платформе которой катится без скольжения круглый цилиндр, если сама тележка скатывается тоже без скольжения по плоскости, наклонённой к горизонту под углом α и параллельной платформе тележки; образующие цилиндра перпендикулярны линиям наибольшего ската платформы. Масса тележки без колёс M , масса всех колёс m , масса цилиндра M_1 , колёса считать однородными сплошными дисками.

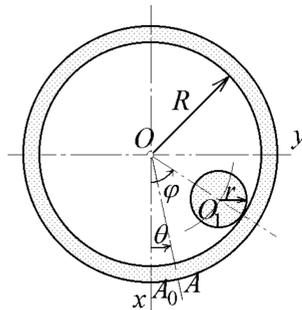
2.22. Один конец нерастяжимой невесомой нити обмотан вокруг однородного круглого цилиндра радиуса R , второй — прикреплён к неподвижной точке O . Цилиндр, разматывая нить, качается вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса нити. Составить дифференциальные уравнения движения цилиндра, найти их первый интеграл.



2.23. Два однородных круглых цилиндра с массами M_1 и M_2 движутся по двум наклонным плоскостям, образующим соответственно углы α и β с горизонтом. Цилиндры соединены невесомой нерастяжимой нитью, намотанной на них, как показано на рисунке. Нить по цилиндрам не проскальзывает. Найти ускорения осей цилиндров и натяжение нити.

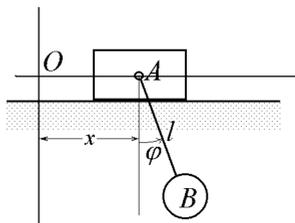


2.24. Шероховатый цилиндр массы m и радиуса r катится без скольжения по внутренней поверхности полого цилиндра массы M и радиуса R , который может вращаться вокруг своей горизонтально расположенной неподвижной оси O . Моменты инерции цилиндров относительно своих осей равны $\frac{mr^2}{2}$ и MR^2 . Найти функцию Лагранжа и первые интегралы уравнений движения, приняв за обобщённые координаты: 1) углы θ и ψ , где $\theta = \angle A_0OA$ определяет положение полого цилиндра относительно неподвижной системы отсчёта, $\psi = \angle AOO_1$; 2) углы θ и $\varphi =$

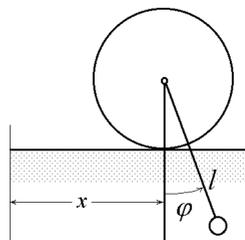


$\angle A_0 O O_1$; 3) составить уравнения движения системы в форме уравнений Рауса.

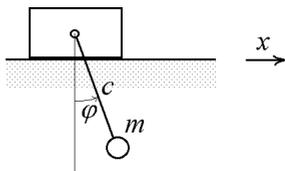
2.25. Эллиптический маятник состоит из ползуна массы m_1 , скользящего без трения по горизонтальной прямой, и точки массы m_2 , соединённой с ползуном стержнем AB длины l . Стержень может вращаться вокруг оси A , связанной с ползуном и перпендикулярной плоскости рисунка. Массой стержня пренебречь. Написать уравнение движения точки относительно ползуна.



2.26. Диск массы M может катиться без скольжения по прямолинейному рельсу. К центру диска шарнирно прикреплен стержень длины l , на конце которого находится точечный груз массы m . Написать уравнения движения системы, как уравнения Рауса. Массой стержня пренебречь.

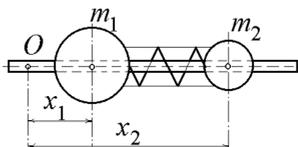


2.27. К бруску массы M , который может скользить без трения по горизонтальным направляющим, на упругой нити жёсткости c подвешен груз массы m , который движется в вертикальной плоскости (длина нити в ненапряжённом состоянии l_0).

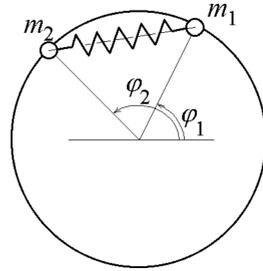


Найти функцию Лагранжа, первые интегралы уравнений движения и функцию Рауса.

2.28. Найти движение системы, состоящей из двух масс m_1 и m_2 , насаженных на гладкий горизонтальный стержень (ось Ox), массы связаны пружиной жёсткости c и могут двигаться поступательно вдоль стержня; расстояние между центрами масс при ненапряжённой пружине равно l . При $t = 0$ $x_1 = 0$, $\dot{x}_1 = u_0$, $x_2 = l$, $\dot{x}_2 = 0$. Найти систему переменных ξ, η , в которых есть циклическая координата; выписать уравнения Рауса, найти их решение.

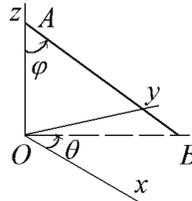


2.29. Две точечные массы m_1 и m_2 , связанные пружиной жёсткости c , могут двигаться без трения по неподвижной окружности радиуса r , лежащей в горизонтальной плоскости. Длина пружины в недеформированном состоянии равна l . Найти 1) первые интегралы уравнений движения в переменных φ_1, φ_2 ; 2) переменные θ_1, θ_2 , одна из которых является циклической. Выписать уравнение Рауса.

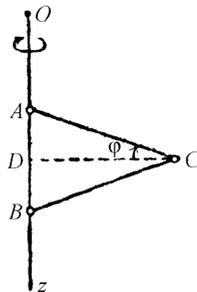


2.30. Тонкий диск массы M радиуса R может своей плоскостью скользить без трения по горизонтальной плоскости. По диску вдоль окружности движется материальная точка массы m с относительной скоростью $v = \alpha t$. Найти закон движения диска.

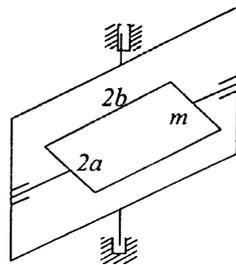
2.31. Однородный тонкий стержень AB массой m и длиной $2l$ скользит концом A по гладкой вертикальной прямой, а концом B по гладкой горизонтальной плоскости под действием своего веса. Найти функцию Лагранжа и первые интегралы уравнений движения в переменных φ, θ . Выписать уравнения Рауса.



2.32. Два одинаковых стержня AC и BC , длины l и массы m каждый, могут скользить без трения концами A и B по неподвижной вертикальной прямой Oz и вращаться вокруг этой прямой; в точке C они соединены шарниром. Найти движение этой системы, принимая за координаты угол $\varphi = \angle ACD$, угол θ поворота системы вокруг оси Oz и расстояние $z = OD$, где D — середина отрезка AB . В начальный момент $\varphi = \varphi_0, \theta = 0, z = z_0, \dot{\varphi} = 0, \dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ и $\dot{z} = 0$.



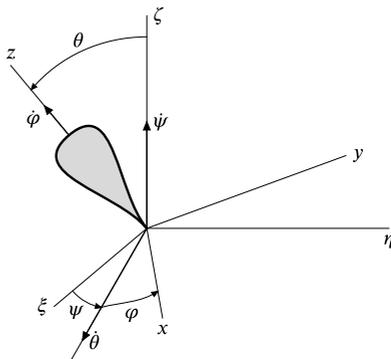
2.33. Ось симметрии однородной прямоугольной пластинки массы m длины $2b$, ширины $2a$ ($b > a$) закреплена горизонтально в рамке, которая может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через центр пластинки. 1) Составить уравнение движения пластинки в переменных ψ , θ (ψ — угол поворота рамки, θ — угол пластинки с вертикалью).



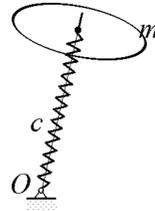
2) Найти момент пары, которую необходимо приложить к рамке, чтобы она вращалась с постоянной угловой скоростью Ω . 3) Составить уравнение движения пластинки, если рамка вращается с постоянной угловой скоростью, а вращению пластинки вокруг горизонтальной оси препятствует вязкое трение с моментом $-c\dot{\theta}$. 4) Как будет меняться угол ψ , если $\theta = \omega t$ ($\omega = \text{const}$)?

2.34. Твёрдое тело с неподвижной точкой движется под действием сил с моментом \mathbf{M} . Выбрав за обобщённые координаты углы Эйлера (θ — угол нутации, ψ — угол прецессии, φ — угол собственного вращения), найти обобщённые силы, если а) $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$; б) $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_3$; в) $\mathbf{M} = -c\boldsymbol{\omega}$ ($\boldsymbol{\omega}$ — мгновенная угловая скорость тела). $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — неподвижный репер, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — репер, жёстко связанный с телом.

2.35. Найти функцию Рауса для волчка Лагранжа массы m , движущегося в однородном поле тяжести; $A = B \neq C$ — главные моменты инерции для неподвижной точки; l — расстояние от неподвижной точки до центра масс. В качестве обобщённых координат взять углы Эйлера.



2.36. Однородный диск радиуса R и массы m , насаженный в центре под прямым углом на невесомый гладкий стержень, конец O которого закреплён сферическим шарниром, может поступательно двигаться вдоль стержня. Центр диска соединён с точкой O пружиной жёсткости c , длина которой в недеформированном состоянии равна l . Найти функции Лагранжа и Рауса диска.



3. Малые колебания

Пусть связи, наложенные на систему, являются голономными и стационарными (уравнения связей не зависят явно от времени), и заданные силы допускают силовую функцию U , также не зависящую от времени.

Решения уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

называются *положениями равновесия*.

Потенциальная энергия системы $V = -U$. Достаточным условием устойчивости положения равновесия является положительная определённость матрицы

$$\left\| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right\|, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

вычисленной в этом положении. Достаточным условием неустойчивости является невырожденность матрицы (3.2) и наличие хотя бы одного отрицательного элемента на диагонали, вычисленного в рассматриваемой точке.

Пусть в положении устойчивого равновесия значения всех обобщённых координат равны нулю (этого всегда можно добиться выбором начала отсчёта для каждой из координат). При сделанных предположениях кинетическая энергия системы представляет собой квадратичную форму обобщённых скоростей. Обозначим через A матрицу кинетической энергии, B — матрицу (3.2) в рассматриваемом положении равновесия, и через \mathbf{q} — вектор-столбец обобщённых координат. Уравнения

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

называются *уравнениями малых колебаний* системы в окрестности положения равновесия. Если начальные условия уравнений (3.2) и (3.3) совпадают и находятся в ε -окрестности положения равновесия, то на конечном, но достаточно большом интервале времени разность решений точных уравнений движения (уравнений Лагранжа) и системы (3.3) не превзойдёт величины порядка ε^2 .

Общее решение системы (3.3) имеет вид:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j (c_j \cos \omega_j t + d_j \sin \omega_j t),$$

где c_j, d_j — произвольные постоянные, ω_j — собственные частоты системы, а \mathbf{u}_j — собственные столбцы, определяемые из уравнений:

$$\det \|\ -\omega^2 A + B \| = 0, \quad (-\omega_j^2 A + B)\mathbf{u}_j = 0.$$

Если все собственные частоты системы различны, то различны и линейно независимы все собственные столбцы. Тогда преобразование

$$\mathbf{q} = G\mathbf{x}$$

с матрицей G , составленной из нормированных собственных столбцов

$$G = (\mathbf{u}_1^\circ \ \dots \ \mathbf{u}_n^\circ), \quad \mathbf{u}_j^\circ = \frac{\mathbf{u}_j}{\sqrt{(\mathbf{u}_j, A\mathbf{u}_j)}}, \quad j = 1, \dots, n$$

приводит систему уравнений (3.3) к виду

$$\ddot{x}_j + \omega_j^2 x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Координаты $x_j, j = 1, \dots, n$ называются *нормальными*, или *главными*.

Пусть координаты $q_k, k = s + 1, \dots, n$ являются циклическими. Координаты q_1, \dots, q_s в этом случае называются *позиционными*. Функция Рауса для натуральных систем представляется в виде:

$$R = R_2 + R_1 + R_0,$$

где R_2 — квадратичная форма обобщённых скоростей, R_1 — линейная форма обобщённых скоростей, R_0 — часть функции Рауса, не содержащая обобщённых скоростей. Назовём систему, движение которой определяется функцией Рауса, *приведённой*. Легко видеть, что для этой системы R_0 может рассматриваться как силовая функция, а решения уравнений

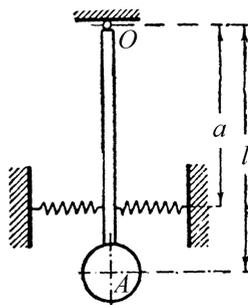
$$\frac{\partial R_0}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s$$

как положения равновесия. Положениям равновесия приведённой системы в исходной системе отвечают движения, в которых позиционные координаты остаются постоянными, а циклические меняются с постоянной скоростью. Такие движения называются *стационарными*. Стационарное движение устойчиво, если на нём матрица

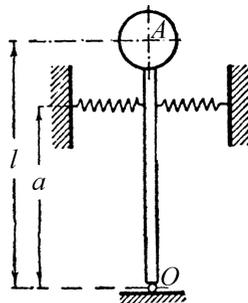
$$\left\| \frac{\partial^2(-R_0)}{\partial q_i \partial q_j} \right\|, \quad i, j = 1, \dots, s$$

положительно определена. В этом случае можно ставить задачу о малых колебаниях системы в окрестности стационарного движения. Решение для позиционных координат аналогично нахождению малых колебаний в окрестности устойчивого положения равновесия.

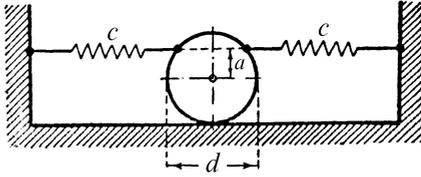
3.1. Маятник состоит из жёсткого стержня длиной l , несущего массу m на своём конце. К стержню прикреплены две пружины жёсткости c на расстоянии a от его верхнего конца; противоположные концы пружин закреплены. Пренебрегая массой стержня, найти период малых колебаний маятника.



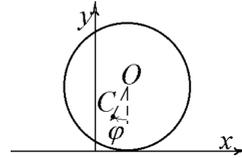
3.2. Предполагая, что маятник, описанный в предыдущей задаче, установлен так, что масса m расположена выше точки подвеса, определить условие, при котором вертикальное положение равновесия маятника устойчиво, и вычислить период малых колебаний маятника.



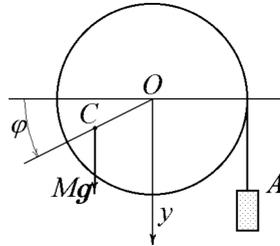
3.3. Цилиндр диаметром d и массой m может катиться без скольжения по горизонтальной плоскости. Две одинаковые пружины жёсткости c прикреплены посередине его длины на расстоянии a от оси цилиндра; противоположные концы пружин закреплены. Определить период малых колебаний цилиндра.



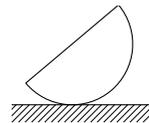
3.4. Неоднородный диск радиуса R и массы M , центр масс C которого расположен на расстоянии a от его геометрического центра O , может катиться без проскальзывания по горизонтальной направляющей. Момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр масс равен J . Найти малые колебания системы около устойчивого положения равновесия.



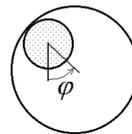
3.5. Найти период малых колебаний системы, состоящей из неоднородного шкива радиуса r и массы M , который вращается вокруг оси O , и центр масс которого находится в точке C , на расстоянии $OC = a$ от оси вращения. Шкив обмотан верёвкой, к свободному концу которой подвешен груз массы m . Радиус инерции шкива относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс, равен k .



3.6. Определить период малых колебаний однородного полудиска радиуса R , находящегося на негладкой горизонтальной плоскости, по которой он может катиться без скольжения.

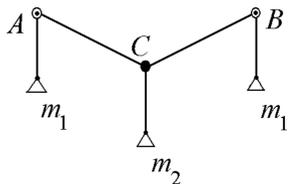


3.7. Обруч массы M и радиуса R может качаться в вертикальной плоскости, опираясь на неподвижный цилиндр радиуса r , как показано на рисунке; проскальзывание между цилиндром и обручем

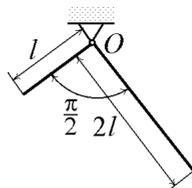


отсутствует. Показать, что период малых колебаний обруча будет совпадать с периодом колебаний математического маятника длины $2(R - r)$.

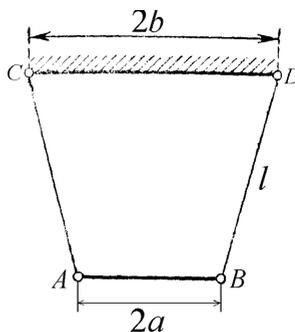
3.8. Три нити связаны в точке C : две из них перекинуты через небольшие неподвижные блоки A и B , расположенные на одной горизонтали, и несут на концах равные грузы m_1 ; к концу третьей нити подвешен груз с массой m_2 , причём $m_2 < 2m_1$. Найти период малых колебаний этой системы около положения равновесия, если $CA = CB = a$, считая, что грузы могут двигаться только по вертикали.



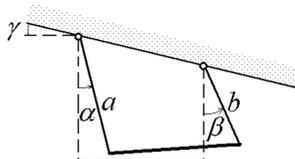
3.9. Уголок, составленный из тонких однородных стержней длин l и $2l$ с углом $\frac{\pi}{2}$, может вращаться вокруг точки O . Определить период малых колебаний системы около положения равновесия.



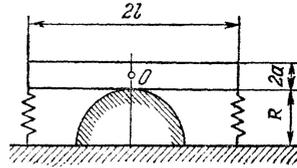
3.10. Однородный тонкий стержень AB длины $2a$ подвешен концами на двух нитях одинаковой длины l , закреплённых в точках C и D , расположенных на расстоянии $2b$ на одной горизонтали (бифилярный подвес). Определить период крутильных колебаний стержня, если его повернуть на небольшой угол вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину, и затем опустить.



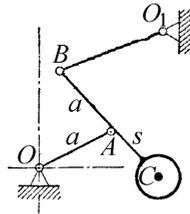
3.11. Палочка длины $2l$ подвешена на двух вертикальных нитях длины a и b . Определить частоту плоских малых колебаний.



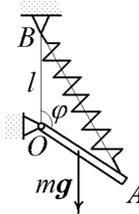
3.12. На шероховатый круглый полуцилиндр радиуса R положен призматический брусок массы M с прямоугольным поперечным сечением. Продольная ось бруска перпендикулярна оси цилиндра. Длина бруска $2l$, высота $2a$. Концы бруска соединены с полом пружинами одинаковой жёсткости c . Предполагая, что брусок не скользит по цилиндру, найти период его малых колебаний. Момент инерции бруска относительно поперечной горизонтальной оси, проходящей через центр масс, равен J_0 .



3.13. Пренебрегая массой стержней, найти период малых колебаний маятника, изображённого на рисунке. Центр масс груза находится на продолжении шатуна шарнирного четырёхзвенника $OABO_1$ в точке C . В положении равновесия стержни OA и BC вертикальны, стержень O_1B горизонтален: $OA = AB = a$, $AC = s$.

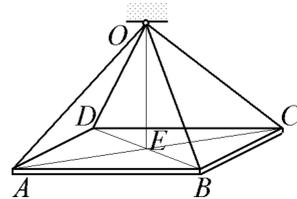


3.14. Найти период малых колебаний около устойчивого положения равновесия тяжёлого однородного стержня OA длины l и массы m , который может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси O и к концу A которого прикреплена пружина AB . Пружина закреплена в точке B , расположенной на расстоянии l над точкой O . Длина нерастянутой пружины l , коэффициент её жёсткости c .



3.15. В задаче 2.33 при условии, что рамка вращается с постоянной скоростью Ω , доказать, что частота малых колебаний пластинки в окрестности устойчивого положения равновесия равна Ω .

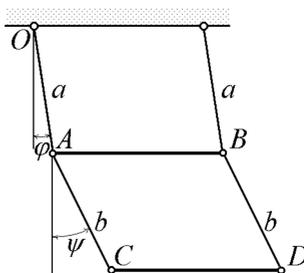
3.16. Тяжёлая квадратная платформа $ABCD$ массы M подвешена на четырёх упругих канатах, жёсткости c каждый, к неподвижной точке O , отстоящей в положении равновесия системы на расстоянии l по вертикали от центра E платформы. Длина диагонали плат-



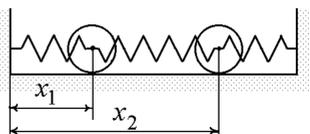
формы a . Определить период вертикальных колебаний системы (точки A, B, C, D перемещаются только вертикально).

3.17. Найти частоты малых колебаний сферического маятника длины l (точка движется по сфере под действием своего веса) в окрестности наинижего положения.

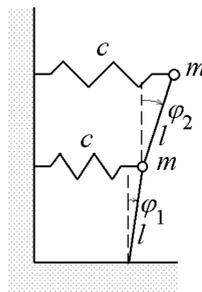
3.18. Стержень AB массы m_1 подвешен за концы A и B к потолку на двух одинаковых нерастяжимых нитях длины a . К стержню AB подвешена на двух одинаковых нерастяжимых нитях длины b балка CD массы m_2 . Предполагая, что колебания происходят в вертикальной плоскости, найти частоты главных колебаний. Массами нитей пренебречь.



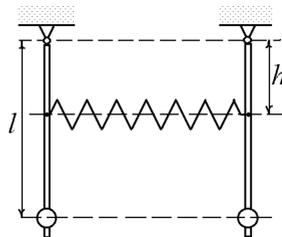
3.19. Два одинаковых однородных диска массы m каждый могут катиться по горизонтальной направляющей. Центры дисков соединены между собой и с неподвижными стенками одинаковыми пружинами жёсткости c . Найти малые колебания системы.



3.20. Найти условия устойчивости вертикального положения равновесия обращённого двойного маятника, изображённого на рисунке, а также его малые колебания в окрестности этого положения, считая, что в этом положении пружины не напряжены.

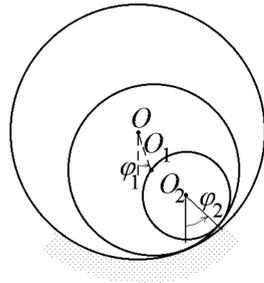


3.21. Точки подвеса двух одинаковых математических маятников с массой m и длиной l расположены на одной горизонтальной прямой. Точки этих маятников, отстоящие от точек подвеса на расстоянии h ($0 < h \leq l$), соединены между собой пружиной жёсткости c ; пружина не натянута, когда маятники занимают вер-

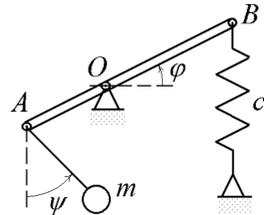


тикальное положение. Найти малые колебания системы в вертикальной плоскости, проходящей через точки подвеса маятников, если в начальный момент один из них отклонён от вертикали на угол α , а начальные скорости равны нулю.

3.22. Три цилиндрические трубы с радиусами $R_0 = 3r$, $R_1 = 2r$, $R_2 = r$ вложены одна в другую, как показано на рисунке. Внешняя труба радиуса R_0 неподвижна, проскальзывание между трубами отсутствует, а их массы равны соответственно $m_1 = 3m$ и $m_2 = m$. Найти малые колебания системы около устойчивого положения равновесия.

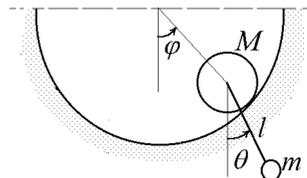


3.23. К концу A однородного стержня AB массы $m_1 = 2m$ и длины $2l$, который может поворачиваться в вертикальной плоскости вокруг неподвижной точки O ($AO = \frac{1}{3}AB$), на невесомой нерастяжимой нити длины l подвешен грузик массы m . Конiec B стержня прикреплен к неподвижному основанию пружиной жёсткости c (при горизонтальном положении стержня пружина не напряжена). Найти малые колебания системы в окрестности устойчивого положения равновесия.



3.24. Найти малые колебания системы в окрестности устойчивого положения равновесия из задачи 2.20 при условии $m = M$, $r = \frac{1}{4}R$.

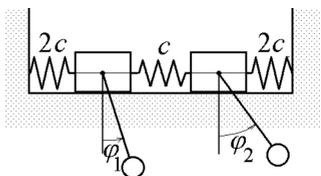
3.25. Однородный диск массы m и радиуса r может катиться без проскальзывания внутри неподвижной окружности радиуса R . К центру диска подвешен груз массы $\frac{m}{2}$ на невесомом стержне длины $\frac{R-r}{2}$. Найти малые колебания системы в окрестности устойчивого положения равновесия, если при $t = 0$



$$\varphi = 0, \quad \theta = \theta_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\theta} = 0.$$

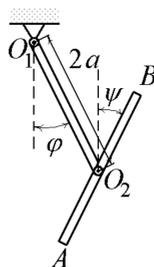
3.26. Три одинаковых пружины жёсткости c прикреплены к точке M массы m , а другие концы пружин закреплены в вершинах равно-стороннего треугольника со стороной l . Плоскость треугольника горизонтальна, и точка M движется в этой плоскости. Найти малые колебания точки около положения равновесия, совпадающего с точкой пересечения биссектрис треугольника. Считать, что в положении равновесия пружины не растянуты.

3.27. Два груза массы m каждый, соединённые между собой пружиной жёсткости c , а с неподвижными стенками пружинами жёсткости $2c$ каждая, могут скользить по гладкой горизонтальной направляющей. К каждому грузу подвешен математический маятник массы $\frac{m}{2}$



и длины l . Найти малые колебания системы. При вычислениях положить $c = \frac{mg}{2l}$.

3.28. Двойной физический маятник состоит из однородного прямолинейного стержня O_1O_2 длины $2a$ и массы m_1 , вращающегося вокруг неподвижной горизонтальной оси O_1 , и из однородного прямолинейного стержня AB массы m_2 , шарнирно соединённого в своём центре масс с концом O_2 первого стержня. Определить движение системы, если в начальный момент стержень O_1O_2 отклонён на угол φ_0 от вертикали, а стержень AB занимает вертикальное положение и имеет начальную угловую скорость ω_0 .



3.29. В задачах 2.25 и 2.26 найти общее решение задачи о малых колебаниях системы в окрестности стационарного движения $\dot{x} = v_0$, $\varphi = 0$.

3.30. В задаче 2.29 найти малые колебания системы в окрестности стационарного движения, если при $t = 0$

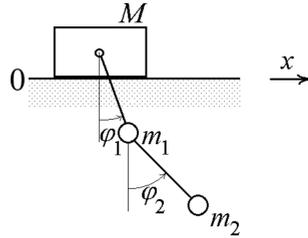
$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \arcsin \frac{l}{2r}, \quad \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{v_0}{r}$$

при условии $m_1 = m_2 = m$.

3.31. В задаче 2.24 найти период малых колебаний маленького цилиндра.

3.32. К бруску массы M , который может двигаться по гладкой горизонтальной направляющей, подвешен двойной маятник, причём

$$m_1 = m_2 = \frac{M}{2}, \quad l_1 = l_2 = l.$$



Найти малые колебания системы в окрестности стационарного движения, если при $t = 0$

$$\dot{x} = v_0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0.$$

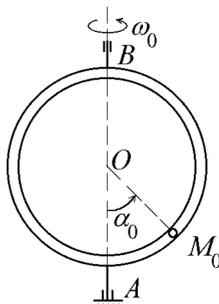
3.33. Найти малые колебания системы из задачи 2.27 в окрестности стационарного движения

$$\dot{x} = v_0, \quad \varphi = 0, \quad l = l_0 + \frac{mg}{c}.$$

3.34. Прямолинейная трубка OA может вращаться без трения в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через точку O . В трубке находится шарик массы m , соединённый с точкой O при помощи пружины. Упругая сила пружины пропорциональна её удлинению, причём коэффициент пропорциональности равен c . Когда трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 , шарик находится в положении относительного равновесия M_0 . Момент инерции трубки относительно оси вращения равен J . Найти период малых колебаний, которые будет совершать шарик около положения M_0 , если ему сообщить небольшую относительную скорость вдоль трубки.

3.35. Трубка, имеющая форму окружности радиуса a , может вращаться без трения вокруг вертикального диаметра AB ; момент инерции трубки относительно диаметра равен J . В трубке может перемещаться без трения материальная точка массы m . Когда трубка вращается с постоянной скоростью ω_0 , точка находится в положении относительного равновесия M_0 , причём $\angle AOM_0 = \alpha_0$. Найти период колебаний около положения M_0 ,

которые будет совершать точка, если ей сообщить небольшую относительную скорость, направленную по касательной к трубке.



4. Канонические уравнения Гамильтона. Метод Якоби

Если заданные силы, действующие на систему, допускают силовую функцию, а наложенные связи голономны, уравнения движения могут быть записаны в виде:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

где

$$H(t, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - L$$

(функция Гамильтона) есть преобразование Лежандра функции Лагранжа, рассматриваемой как функция от $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$; обобщённые импульсы p_j определяются соотношениями

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Уравнения (4.1) называются *уравнениями Гамильтона*, или *каноническими уравнениями движения*.

Если

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

то уравнения Гамильтона допускают *интеграл Якоби (обобщённый интеграл энергии)*

$$H = h.$$

При этом, если $H = T + V$, то

$$H = T + V = h,$$

т. е. выполняется закон сохранения механической энергии.

При наличии циклических координат q_s ($s = k + 1, \dots, n$),

$$\frac{\partial H}{\partial q_s} = 0,$$

уравнения Гамильтона обладают циклическими интегралами

$$p_s = \text{const}.$$

Уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n\right) = 0, \quad (4.2)$$

где H — функция Гамильтона, в которой обобщённые импульсы заменены на частные производные искомой функции W по соответствующим обобщённым координатам, называется уравнением Гамильтона — Якоби.

Если известен полный интеграл уравнения (4.2), т. е. функция W , являющаяся решением (4.2), зависящая от t, q_1, \dots, q_n и от n произвольных постоянных α_j , причём

$$\det \left\| \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right\| \neq 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

то общее решение уравнений (4.1) находится из соотношений

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_j} = -\beta_j = \text{const}, \quad \frac{\partial W}{\partial q_j} = p_j. \quad (4.4)$$

При этом сначала надо найти обобщённые координаты из первых n уравнений системы (4.4). Для выполнения этой операции является достаточным условие (4.3). Затем подстановкой полученных выражений для q_j в последние n соотношений (4.4) получаются выражения для p_j в зависимости от времени и $2n$ произвольных постоянных α_i, β_i ($i = 1, \dots, n$). Такой способ получения решения канонических уравнений (4.1) называется методом Якоби.

Общего метода для нахождения полного интеграла уравнения (4.2) не существует.

В случае, если

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

W можно искать в виде

$$W = -ht + S(q_1, \dots, q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \quad (\alpha_k = h),$$

где h — произвольная постоянная, а S зависит от меньшего числа переменных и удовлетворяет уравнению

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n\right) = h.$$

Если H не зависит от времени и есть несколько циклических координат, подстановкой

$$W = -ht + \sum_{i=1}^k \alpha_i q_i + S_1(q_{k+1}, \dots, q_n, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{n-1}),$$

задача сводится к отысканию функции S_1 , зависящей только от позиционных координат, $h, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ — произвольные постоянные, а S_1 является полным интегралом уравнения

$$H\left(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \frac{\partial S_1}{\partial q_{k+1}}, \dots, \frac{\partial S_1}{\partial q_n}, q_{k+1}, \dots, q_n\right) = h.$$

Если структура H такова, что выделяется комбинация, зависящая только от какой-либо координаты, например, q_1 , и соответствующего ей импульса p_1 ,

$$H = G(t, f(q_1, p_1), p_2, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n),$$

W можно искать в виде

$$W = \varphi_1(q_1, \alpha_1) + W_1,$$

где W_1 не зависит от q_1 и является полным интегралом уравнения

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} + G\left(t, \alpha_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W_1}{\partial q_n}, q_2, \dots, q_n\right) = 0,$$

а φ_1 определяется из уравнения

$$f\left(q_1, \frac{d\varphi_1}{dq_1}\right) = \alpha_1.$$

Если функция Гамильтона не зависит от времени и имеет вид

$$H(f_1(q_1, p_1), \dots, f_n(q_n, p_n)),$$

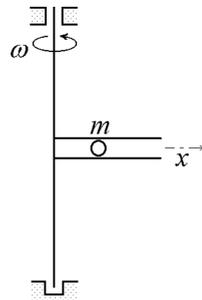
полный интеграл уравнения (4.2) можно искать в виде

$$W = -ht + \sum W_i(q_i, \alpha_i), \quad h(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

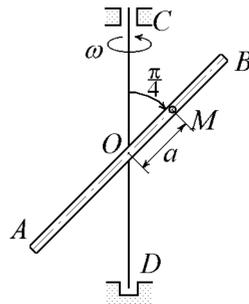
W_i являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_i\left(q_i, \frac{dW_i}{dq_i}\right) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

4.1. По гладкой горизонтальной трубке, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, может двигаться точка массы m . 1) Найти общее решение канонических уравнений движения точки. 2) Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби. Получить решение методом Якоби. За обобщённую координату принять x — расстояние точки до оси вращения.



4.2. Гладкая трубка AB вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси CD , составляя с ней неизменный угол $\frac{\pi}{4}$. В трубке находится тяжёлый шарик массы m . 1) Решить задачу Коши для канонических уравнений движения шарика, если его начальная относительная скорость равна нулю и начальное расстояние от точки O равно a . 2) Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби и найти решение канонических уравнений методом Якоби.



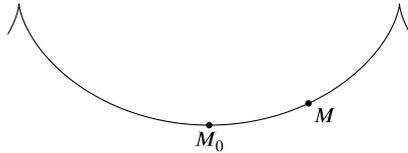
4.3. Шарик массы m , привязанный к нерастяжимой нити, скользит по гладкой горизонтальной плоскости; другой конец нити втягивают с постоянной скоростью a в отверстие, сделанное на плоскости. 1) Решить задачу Коши для канонических уравнений движения шарика, если в начальный момент нить расположена по прямой, расстояние

между шариком и отверстием равно R , а проекция начальной скорости шарика на перпендикуляр к направлению нити равна v_0 . 2) Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби и общее решение канонических уравнений движения методом Якоби.

4.4. Точка массы m под действием собственного веса движется по циклоиде

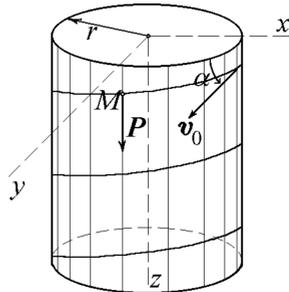
$$x = r(\theta + \sin \theta),$$

$$y = -r(1 + \cos \theta),$$

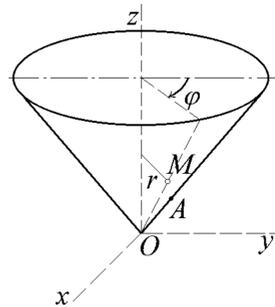


расположенной в вертикальной плоскости. 1) Решить задачу Коши для канонических уравнений движения точки, если при $t = 0$ $\theta = 0$, $v = v_0$. В качестве обобщённой координаты взять дугу циклоиды $s = \overset{\curvearrowright}{M_0 M}$. 2) Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби и общее решение задачи методом Якоби.

4.5. Тяжёлая точка M массы m движется по поверхности круглого цилиндра радиуса r , ось которого вертикальна. 1) Решить задачу Коши для канонических уравнений движения точки, если её начальная скорость равна по величине v_0 и составляет угол α с горизонтом. 2) Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби и закон движения точки методом Якоби.



4.6. Точка M массы $m = 1$ кг движется по гладкой поверхности круглого конуса с углом раствора $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ под влиянием силы отталкивания от вершины O , пропорциональной расстоянию: $F = c \cdot OM$ Н, где $c = 1$ Н/м. В начальный момент точка M находится в точке A , расстояние OA равно $a = 2$ м, начальная скорость $v_0 = 2$ м/с и направлена параллельно основанию конуса. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби. Найти движение точки M методом Якоби. Положение точки M задать цилиндрическими координатами z , r и φ .



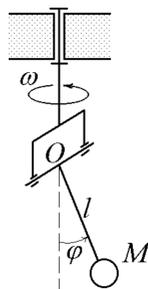
4.7. Точка массы m движется по неподвижной прямой Ox под действием силы $\mathbf{F} = -cxe_x$ (линейный осциллятор). Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби и общее решение канонических уравнений движения методом Якоби.

4.8. Материальная точка движется по прямой под действием сил, силовая функция которых имеет вид:

$$1) U = \frac{1}{2ch^2q}; \quad 2) U = -(e^{-2q} - e^{-q}).$$

Найти общее решение задач методом Якоби в колебательной области. Нарисовать фазовые портреты.

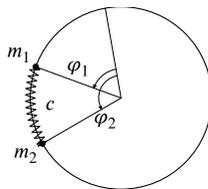
4.9. Материальная точка массы m подвешена с помощью стержня длины l к плоскому шарниру, горизонтальная ось которого вращается вокруг вертикали с постоянной скоростью ω . Составить канонические уравнения движения. Найти их первый интеграл. Массой стержня пренебречь.



4.10. Физический маятник массы m вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси. Момент инерции маятника относительно этой оси равен J , расстояние от центра масс маятника до оси равно l . Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби и первые интегралы движения маятника.

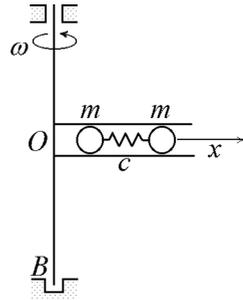
4.11. Точка массы m движется по гладкой сфере радиуса R в однородном поле силы тяжести (сферический маятник). Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби и полный набор первых интегралов канонических уравнений движения. Положение точки задать её сферическими координатами: φ — широта, отсчитываемая от вертикали, направленной вниз, θ — долгота.

4.12. Две точечные массы m_1 и m_2 , связанные невесомой пружиной жёсткости c , могут двигаться без трения по неподвижному кольцу радиуса r , лежащему на горизонтальной плоскости. Длина пружины в недеформированном состоянии равна l .
1) Найти независимые переменные θ_1, θ_2 ,



в которых полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби нашёлся бы методом разделения переменных. 2) Найти полный интеграл и решение канонических уравнений Гамильтона методом Якоби.

4.13. Два одинаковых шарика массы m , связанные между собой пружиной жёсткости c (длина пружины в недеформированном состоянии равна l), могут скользить без трения по трубке, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. 1) Найти переменные y_1, y_2 , в которых полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби нашёлся бы методом разделения переменных.



2) Найти полный интеграл и решение канонических уравнений Гамильтона методом Якоби.

4.14. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби и движение свободной материальной точки по инерции в инерциальной декартовой системе координат методом Якоби.

4.15. Точка массы m движется в вертикальной плоскости xu под действием силы тяжести (ось u направлена вертикально вверх). Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби и общее решение канонических уравнений движения методом Якоби.

4.16. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби и закон движения точки массы m в однородном поле силы тяжести методом Якоби в декартовых координатах x, y, z (ось z направлена вверх).

4.17. Тяжёлая точка массы m движется без трения в плоскости zOx , вращающейся вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω (ось Oz направлена вверх). Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби и общее решение канонических уравнений движения методом Якоби.

4.18. Две материальные точки массы m_1 и m_2 связаны гибкой нерастяжимой нитью. Точка массы m_1 может двигаться по гладкому горизонтальному столу, а точка массы m_2 находится на свисающем конце нити, которая пропущена через небольшое отверстие в столе. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, если точка массы m_2 может двигаться только по вертикали. Выписать первые интегралы канонических уравнений движения.

4.19. Две материальные точки массы m_1 и m_2 связаны между собой упругим стержнем жёсткости c и помещены на гладкую горизонтальную плоскость; стержень не работает на изгиб и на кручение и в нерастяннутом состоянии имеет длину l ; массой стержня пренебречь.

1) Выписать первые интегралы канонических уравнений движения системы. 2) Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби и решение задачи методом Якоби. За обобщённые координаты принять x , y — декартовы координаты центра масс, r — длину стержня и φ — угол, определяющий положение стержня.

4.20. Свободная материальная точка массы m движется под действием ньютоновской силы притяжения к неподвижному центру O . Приняв за обобщённые координаты сферические координаты точки r , φ , θ , найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, выписать полную систему первых интегралов канонических уравнений движения точки. Доказать, что движение плоское, выполняется закон площадей; получить уравнение траектории.

4.21. (Задача двух тел). Сила взаимодействия двух точек массы m_1 и m_2 обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними (ньютоновское или кулоновское взаимодействие). Найти полный интеграл уравнений Гамильтона — Якоби; выписать полную систему первых интегралов канонических уравнений движения. В качестве обобщённых координат взять координаты центра масс системы x , y , z , расстояние r между точками, а также углы широты и долготы φ и θ , определяющие в пространстве положение прямой, соединяющей точки. Сравнить полученный ответ с ответом задачи 4.20.

4.22. Однородный стержень массы m и длины $2l$ движется по гладкой вертикальной плоскости $O\xi\eta$. Плоскость вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси $O\eta$. Найти движение стержня методом Якоби. За обобщённые координаты принять ξ , η — координаты центра масс стержня и угол φ стержня с вертикалью, направленной вверх.

4.23. Выписать канонические уравнения движения для волчка Лагранжа (см. задачу 2.35). Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби.

4.24. Стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси (которая проходит через некоторую точку стержня). Найти общее решение канонических уравнений движения колечка массы m , насаженного на стержень

1) непосредственным интегрированием, и 2) методом Якоби; выписать полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби.

4.25. Плоскость $O\xi\eta$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной горизонтальной оси $O\xi$. В плоскости движется однородный стержень массы m и длины l . Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби; за обобщённые координаты выбрать ξ и η — координаты центра масс стержня, и φ — угол стержня с осью $O\eta$.

4.26. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби и закон движения однородного стержня массы m и длины $2l$ в однородном поле силы тяжести методом Якоби. За обобщённые координаты выбрать x, y, z — координаты центра масс стержня, φ — угол стержня с вертикалью, θ — угол, определяющий положение вертикальной плоскости, в которой расположен стержень.

4.27. Материальная точка M массы m движется под действием двух ньютоновских сил притяжения, центры C_1 и C_2 которых расположены на неподвижной оси, расстояние между ними равно $2c$. Найти интегралы канонических уравнений Гамильтона методом Якоби.

За обобщённые координаты принять угол поворота плоскости, определяемой точками M, C_1 и C_2 и эллиптические координаты в этой плоскости

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2c}, \quad \mu = \frac{r_1 - r_2}{2c},$$

где $r_1 = C_1M, r_2 = C_2M$.

4.28. Для разделения переменных в уравнении Гамильтона — Якоби для точки в сферических координатах r, θ, φ необходимо и достаточно, чтобы потенциал заданных сил имел вид:

$$V(r, \theta, \varphi) = R(r) + \frac{\Theta(\theta)}{r^2} + \frac{\Phi(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta},$$

где $R(r), \Theta(\theta)$ и $\Phi(\varphi)$ — произвольные функции. Найти полный интеграл.

4.29. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби для точки массы m , движущейся в поле с потенциалом

$$V = -\frac{k}{r} + k'z$$

(например, наложение полей ньютоновского притяжения к началу координат и однородного поля силы тяжести ($k' = mg$)).

Указание. За независимые переменные принять параболические координаты ξ, η, φ , которые с цилиндрическими координатами ρ, z, φ связаны так:

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \rho = \sqrt{\xi\eta}, \quad \varphi \equiv \varphi.$$

4.30. Составить уравнение Гамильтона — Якоби и найти его полный интеграл для волчка Лагранжа ($A = B \neq C$, центр тяжести находится на расстоянии l от неподвижной точки) в углах Эйлера: ψ, θ, φ — углы прецессии, нутации и собственного вращения, соответственно. Выписать полную систему первых интегралов канонических уравнений движения волчка.

4.31. Показать справедливость следующего случая интегрируемости (Штеккеля). Пусть даны $n(n+1)$ произвольных функций $\varphi_{ij}(q_i)$ и $V_i(q_i)$ ($i = 1, \dots, n$), для которых определитель $\Delta = \det |\varphi_{ij}|$ не равен тождественно нулю. Тогда если кинетическая энергия и потенциальная энергия определяются формулами

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\dot{q}_i^2}{A_i}, \quad V = \sum_{i=1}^n A_i V_i,$$

причём

$$A_i = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{i1}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

то уравнение Гамильтона — Якоби интегрируется в квадратурах и полный интеграл этого уравнения имеет вид

$$S = -ht + \sum_{i=1}^n \int \sqrt{2h\varphi_{i1} - 2V_i + \sum_{j=2}^n \alpha_j \varphi_{ij}} dq_j,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — произвольные постоянные, а h — постоянная энергии.

4.32. Доказать теорему Лиувилля:

Если кинетическая и потенциальная энергии системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n A_i \right) \sum_{i=1}^n B_i \dot{q}_i^2, \quad \bar{V} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{V}_i}{\sum_{i=1}^n A_i},$$

где A_i , B_i и \bar{V}_i — функции от одной переменной q_i ($i = 1, \dots, n$), то конечные уравнения движения системы могут быть получены с помощью квадратур.

5. Канонические преобразования. Скобки Пуассона

Преобразование переменных Гамильтона $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ в переменные $Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n$ называется *каноническим*, если оно любую гамильтонову систему переводит в гамильтонову (вообще говоря, с другой функцией Гамильтона \tilde{H}). Т. е. уравнения в новых переменных примут вид

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Необходимым и достаточным условием каноничности преобразования

$$Q = Q(p, q, t), \quad P = P(p, q, t), \quad i = 1, \dots, n \quad (5.1)$$

является существование функции F и некоторой постоянной c , при которых тождественно выполняется, в силу рассматриваемого преобразования, соотношение:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - \tilde{H} dt &= \\ &= c \left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt \right) - dF(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t). \end{aligned}$$

Параметр c называется *валентностью* преобразования. Если $c = 1$, преобразование называется *унивалентным*.

Каноническое преобразование называется *свободным*, если выполнено неравенство

$$\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \neq 0,$$

обеспечивающее независимость переменных $q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n, t$. В этом случае функцию $F(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ можно выразить в зависимости только от старых и новых координат

$$F(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = S(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n, t).$$

Функцию S называют *производящей функцией* канонического преобразования (5.1). Тогда через производящую функцию S каноническое преобразование можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = c p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial Q_i} = -P_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\tilde{H} = c H + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Если выполнено неравенство

$$\frac{\partial(P_1, \dots, P_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \neq 0,$$

в качестве производящей функции преобразования можно взять функцию

$$S_1(t, q, P) = F + \sum_{i=1}^n Q_i P_i.$$

Тогда связь переменных $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ с переменными $Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n$ определится соотношениями

$$\frac{\partial S_1}{\partial q_i} = c p_i, \quad \frac{\partial S_1}{\partial P_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\tilde{H} = c H + \frac{\partial S_1}{\partial t}.$$

Скобкой Пуассона двух функций $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ и $G(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ называется выражение

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right).$$

Необходимое и достаточное условие того, что $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ является интегралом уравнений Гамильтона, записывается так:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0$$

(доказать).

5.1. Доказать свойства скобок Пуассона:

$$1) \{F, G\} = -\{G, F\};$$

$$2) \text{ Если } F = \varphi(f_1, \dots, f_m), \text{ то } \{F, G\} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial f_i} \{f_i, G\};$$

$$3) \{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} \equiv 0;$$

$$4) \frac{\partial}{\partial \alpha} \{F, G\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right\}.$$

5.2. Вычислить скобки Пуассона $\{K_j, p_i\}$, $\{K_i, K_j\}$, $\{K^2, K_j\}$, $\{x_i, K_j\}$, $i, j = 1, 2, 3$, где $x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$ — декартовы координаты и компоненты импульса частицы, K_1, K_2, K_3 — компоненты её кинетического момента относительно начала координат, а $K^2 = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2$.

5.3. С помощью скобок Пуассона записать канонические уравнения Гамильтона.

5.4. Показать, что если функция Гамильтона системы не содержит времени явно, и если существует первый интеграл $f(t, q, p) = a$, явно зависящий от времени, то производные

$$\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \dots$$

также являются первыми интегралами канонических уравнений движения.

5.5. Функция $\varphi(q, p, t)$ является первым интегралом канонических уравнений движения системы с циклической координатой q_k . Показать, что функции

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_k}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_k^2}, \dots, \frac{\partial^n \varphi}{\partial q_k^n}$$

также будут первыми интегралами уравнений движения.

5.6. Показать, что для системы с функцией Гамильтона

$$H = H(f(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m), q_{m+1}, \dots, q_n, p_{m+1}, \dots, p_n, t)$$

функция $f(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m)$ является первым интегралом канонических уравнений движения.

5.7. Показать, что для системы с функцией Гамильтона

$$H = H(\varphi_1(q_1, p_1), \dots, \varphi_n(q_n, p_n), t)$$

функции $\varphi_i(q_i, p_i)$ ($i = 1, \dots, n$) являются первым интегралами канонических уравнений движения.

5.8. Показать, что для системы с функцией Гамильтона

$$H = F(f_n(\dots f_2(f_1(q_1, p_1), q_2, p_2)), t)$$

функции

$$f_1(q_1, p_1), \quad f_i(f_{i-1}, q_i, p_i), \quad i = 2, \dots, n$$

являются первыми интегралами канонических уравнений движения.

5.9. Заданы две функции $W(p, q, t)$ и $\varphi(q, p, t)$, удовлетворяющие соотношению

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \{W, H\} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \{\varphi, H\},$$

где $\{W, H\}$ и $\{\varphi, H\}$ — скобки Пуассона. Построить первый интеграл канонической системы с функцией Гамильтона $H(q, p, t)$, используя функции $W(q, p, t)$ и $\varphi(q, p, t)$.

5.10. Функция $W(q, p, t)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \{W, H\} \equiv f(t),$$

где $\{W, H\}$ — скобка Пуассона. Построить первый интеграл канонической системы с функцией Гамильтона $H(q, p, t)$, используя функции $W(q, p, t)$ и $f(t)$.

5.11. Пусть функция Гамильтона системы $H(q, p)$ не содержит времени явно, так что канонические уравнения обладают интегралом энергии $H = h$. Пусть известен ещё один первый интеграл $\varphi = \text{const}$. Показать, что применение скобок Пуассона для отыскания других интегралов возможно только, если функция $\varphi(t, q, p)$ содержит время явно.

5.12. Рассмотреть преобразования

- 1) $Q_i = \alpha q_i, \quad P_i = \beta p_i, \quad i = 1, \dots, n;$
- 2) $Q_i = \alpha p_i, \quad P_i = \beta q_i, \quad i = 1, \dots, n;$
- 3) $Q_i = \alpha p_i \operatorname{tg} t, \quad P_i = \beta q_i \operatorname{ctg} t, \quad i = 1, \dots, n;$
- 4) $Q = \alpha q + \beta p, \quad P = \alpha_1 q + \beta_1 p, \quad \alpha \beta_1 - \alpha_1 \beta = 0;$
- 5) $Q = \sqrt{q} \cos 2p, \quad P = \sqrt{q} \sin 2p;$

проверить их каноничность, найти производящие функции и валентности, а также выражения для новой функции Гамильтона, если старая равна H .

5.13. Показать, что преобразование

$$Q = (2q)^{1/2} k^{-1/2} \cos p, \quad P = (2q)^{1/2} k^{1/2} \sin p.$$

является каноническим, найти его производящую функцию

5.14. Найти производящую функцию и формулы преобразования импульсов, если задано преобразование декартовых координат в перечисленные ниже: 1) цилиндрические ρ, φ, z ; 2) сферические r, φ, θ ; 3) $x = q_1 - v_1 t, y = q_2 - v_2 t, z = q_3 - v_3 t$; 4) $x = \sqrt{\xi \eta} \cos \varphi, y = \sqrt{\xi \eta} \sin \varphi, z = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$.

5.15. Показать, что каноническое преобразование, переводящее систему с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$$

в систему с

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\omega(Q^2 + P^2)$$

имеет вид:

$$Q = \omega q, \quad P = p.$$

5.16. Какому условию должны удовлетворять функции φ_i и ψ_i для того, чтобы преобразование

$$Q_i = Q_i(q_j, p_j, t), \quad P_i = \varphi_i(p_1, \dots, p_n, t) + \psi_i(q_1, \dots, q_n), \\ i = 1, \dots, n$$

было каноническим преобразованием валентности c ?

5.17. Построить каноническое преобразование, переводящее систему с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$$

(осциллятор) в систему с функцией Гамильтона

$$H_1 = \frac{\omega}{2}(P^2 + Q^2).$$

Найти также валентность s и производящую функцию S этого преобразования.

5.18. Скобки Пуассона функций $H_1(q, p, t)$ и $H_2(q, p, t)$ удовлетворяют соотношению $\{H_1, H_2\} = 1$. Показать, что если функция Гамильтона системы равна

$$\text{а) } H = H_1 + H_2; \quad \text{б) } H = H_1 H_2;$$

$$\text{в) } H = \frac{H_1}{H_2}; \quad \text{г) } H = H_1^2 + H_2^2,$$

то общее решение соответствующей канонической системы уравнений можно найти, решив относительно q, p систему алгебраических уравнений:

$$\text{а) } H_1(q, p, t) = c_1 + t, \quad H_2(q, p, t) = c_2 - t;$$

$$\text{б) } H_1(q, p, t) = c_1 e^t, \quad H_2(q, p, t) = c_2 e^{-t};$$

$$\text{в) } H_1(q, p, t) = c_1 \sqrt{2t + c_2}, \quad H_2(q, p, t) = \sqrt{2t + c_2};$$

$$\text{г) } H_1(q, p, t) = c_1 \sin(2t + c_2), \quad H_2(q, p, t) = c_1 \cos(2t + c_2).$$

Указание. При условиях задачи преобразование

$$Q = H_1(q, p, t), \quad P = H_2(q, p, t)$$

является унивалентным каноническим преобразованием.

5.19. Точка массы m совершает прямолинейное одномерное под действием силы $F = -cx$, где x — расстояние точки от начала координат. Найти каноническое преобразование к переменным X, P , в которых функция Гамильтона имеет вид:

$$\tilde{H} = \sqrt{\frac{c}{m}} P.$$

5.20. Найти производящие функции $S(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ преобразований, связывающих начальные данные (q_0, p_0) с текущими переменными для 1) линейного осциллятора $\ddot{q} = -\omega^2 q$; 2) движения точки массы m по инерции в декартовых координатах x, y, z ; 3) движения свободной точки массы m в однородном поле силы тяжести в декартовых координатах x, y, z (z — вертикаль, направленная вверх);

5.21. Систему с функцией Гамильтона

$$H = (p + q)^2 e^{2(p+q)^2} + 2(p^2 - q^2)e^{(p+q)^2} + 2(p^2 + q^2)$$

подвергнуть преобразованию

$$Q = p + q, \quad P = 2p(e^{(p+q)^2} + 1) + 2q(e^{(p+q)^2} - 1).$$

Убедиться, что это преобразование является каноническим. Найти функцию Гамильтона преобразованной системы.

5.22. Систему с функцией Гамильтона

$$H = a \sum_{i=1}^n \left(p_i^2 + (q_i - \gamma_i t \ln(p_i \gamma_i t))^2 \right) + \sum_{i=1}^n \gamma_i p_i \ln(p_i \gamma_i t)$$

подвергнуть преобразованию

$$Q_i = q_i - \gamma_i t \ln(p_i \gamma_i t), \quad P = a p_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Убедиться, что это преобразование является каноническим. Найти функцию Гамильтона преобразованной системы.

5.23. Систему с функцией Гамильтона

$$H = \frac{pq^3}{2t}$$

подвергнуть преобразованию

$$Q = \frac{1}{q^2} + \ln(tpq^3), \quad P = pq^3 \left(1 + te^{\frac{1}{q^2}} \right).$$

Убедиться, что это преобразование является каноническим. Найти функцию Гамильтона преобразованной системы.

5.24. Систему с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \left(\arcsin \sqrt{\frac{1}{2q_i}} - p_i \right)$$

подвергнуть каноническому преобразованию

$$Q_i = \frac{1}{t} \left(\arcsin \sqrt{\frac{1}{2q_i}} - p_i \right), \quad P_i = 2q_i t.$$

Найти функцию Гамильтона преобразованной системы.

Ответы

1.2. $\cos \varphi = 0,1 \mp \sqrt{0,51}$.

1.3.

$$r = \frac{2ak}{k + k_1}, \quad r_1 = \frac{2ak_1}{k + k_1}.$$

1.4.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l(Q - P)}{(P + Q)\sqrt{r^2 - l^2}}.$$

1.5. $Q = \frac{1}{2}Ptg \alpha$.

1.6. $Q = 4\pi P \frac{l}{h}$.

1.7.

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

1.8.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_1 + 2M_2}{2F}g, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{M_2}{2F}g.$$

1.9.

$$\frac{P}{Q} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}.$$

1.11. $M = mga \sin \alpha \sin \theta$.

1.12.

$$\sin \varphi = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}.$$

1.13. В положении равновесия угол θ находится из уравнения

$$M\sqrt{l^2 - (a - b)^2 - 4ab \sin^2 \frac{\theta}{2}} = Qab \sin \theta.$$

1.14. $F_D = 4F_A$.

1.15.

$$M_1 = \frac{M}{2 \sin \alpha}, \quad M_2 = \frac{M}{2 \sin \beta}.$$

1.16. $M_1 = \frac{M}{2}; f = 1$.

1.17. $R_A = 10 \text{ кН}, R_B = 105 \text{ кН}, R_D = -5 \text{ кН}$.

1.18. $R = 0,5P$.

1.19.

$$R_{Ax} = F \cos \alpha, \quad R_{Ay} = \frac{1}{2} F \sin \alpha, \quad L = Fa \sin \alpha$$

(R — результирующий вектор, L — момент результирующей пары реакций).

1.20. $Y_A = P_1 - P_2 \frac{h}{l}$.

1.21. $R = P_1 + \frac{1}{2} P_2$.

1.22.

$$m_A = \left(P_1 + \frac{1}{2} P_2 \right) h.$$

1.23. Если $r_1 < r$, то равновесие устойчивое; если $r_1 \geq r$, то равновесие неустойчивое.

1.24. Эллипс $x^2 + (2y - a)^2 = a^2$.

1.25. Первое положение равновесия:

$$x_2 = -x_1 = \frac{l}{2}, \quad y_1 = y_2 = \frac{al^2}{4}.$$

Второе положение равновесия определяется из уравнения $\operatorname{ch} \xi = \sqrt{al}$ по формулам

$$x_1 = -\frac{1}{2a} e^{-\xi}, \quad y_1 = \frac{1}{4a} e^{-2\xi}, \quad x_2 = \frac{1}{2a} e^{\xi}, \quad y_2 = \frac{1}{4a} e^{2\xi}.$$

1.26. Положения равновесия отвечают значениям эксцентрических аномалий, определяемым из уравнений

а) $\varphi_1 = 2\pi - \varphi_2, \quad \sin \varphi_2 = \sqrt{\frac{l}{2b}}$ (существует при $l \leq 2b$);

б) $\sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \sqrt{\frac{l}{2a}}, \quad \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{l}{2a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}}}$

(существует при $a > b$ и $l < 2a$).

1.27. На верхней полуокружности ($0 < \varphi < \pi$) при любых значени-

ях $\frac{m_1}{m_2}$ существует положение неустойчивого равновесия

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2} + 8} - \frac{m_2}{m_1} \right),$$

причём $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$.

На нижней полуокружности ($\pi < \varphi < 2\pi$) при $\frac{m_1}{m_2} \leq 1$ существует положение устойчивого равновесия

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2} + 8} + \frac{m_2}{m_1} \right),$$

причём $\pi < \varphi_0 < \frac{3\pi}{2}$.

1.28. Положения равновесия отвечают следующим значениям углов ψ : $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = \frac{\pi}{6}$, $\psi_3 = \frac{\pi}{2}$, $\psi_4 = \frac{3\pi}{2}$. Первое и третье положения равновесия устойчивы.

1.29. Угол θ определяется из уравнения

$$a \operatorname{tg}^3 \theta - r \operatorname{tg}^2 \theta - r = 0,$$

$\psi = 0$, если $l > 2r$, положение равновесия устойчиво.

Если $l = 2r$, есть семейство неустойчивых положений равновесия $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} \geq \psi \geq -\frac{\pi}{4}$.

1.30. Четыре состояния равновесия

$$\varphi_1 = 0, \psi_1 = 0; \quad \varphi_2 = \pi, \psi_2 = \pi; \quad \varphi = \mp \varphi_3, \psi = \pm \psi_3,$$

где

$$\cos \varphi_3 = \cos \psi_3 = \frac{mg + ca}{2ca}.$$

При $mg > ca$ устойчиво первое положение равновесия. При $mg < ca$ устойчивы последние два положения равновесия. Второе положение равновесия всегда неустойчиво.

1.31. $M_1 = \frac{M}{\sqrt{2}}$; уравнение направляющей в полярных координатах r, θ :

$$r^2 = 2(l - 2\sqrt{2}a \cos \theta)r + 4\sqrt{2}al - l^2 - 8a^2.$$

1.32. Условия устойчивости имеют вид

$$13ch^2 - 4mgh > 0,$$

$$49c^2h^4 - 59mgch^3 + 12m^2g^2h^2 > 0,$$

$$36c^3h^6 - 153mgc^2h^5 + 130m^2g^2ch^4 - 24m^3g^3h^3 > 0.$$

2.1.

$$(l + a\theta)\ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2 + g \sin \theta = 0,$$

где θ — угол отклонения маятника от вертикали.

2.2.

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi + \frac{\xi}{l} \ddot{\xi} \cos(\varphi - \alpha) = 0,$$

где φ — угол нити с вертикалью.

2.3.

$$4mr\ddot{\varphi} - m\omega^2 R \sin 4\varphi + 2mg \sin 2\varphi - 2c \sin \varphi (2R \cos \varphi - l) = 0.$$

2.4.

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta \right) \sin \theta = 0,$$

$$M = 2mR^2\omega\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta,$$

$$\dot{\theta}^2 - \omega^2 \sin^2 \theta - \frac{2g}{R} \cos \theta = \text{const.}$$

2.5.

$$L = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 \left(\frac{(1 + a^2x^2)^{3/2} - aR}{1 + a^2x^2} \right)^2 - \frac{1}{2}mga \left(x^2 + \frac{2R}{a\sqrt{1 + a^2x^2}} \right).$$

2.6.

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{\alpha} \frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1}},$$

где $\beta = \frac{2}{J} \sqrt{\alpha M}$.

2.7.

$$\omega = \frac{M}{\alpha} (1 - e^{-\frac{at}{J}}).$$

2.8.

$$\omega = \sqrt{\frac{2MghJ}{J^2 + 4\alpha^2} \left(e^{-\frac{\alpha\pi}{J}} + 2\frac{\alpha}{J} \right)}.$$

2.9.

$$x = \frac{F}{c}(r \cos \alpha - a) \left(\frac{m}{c} \frac{r^2 + \rho^2}{r} \left(e^{-\frac{c}{m} \frac{r}{r^2 + \rho^2} t} - 1 \right) + t \right),$$

где x — координата центра масс катка.

2.10.

$$\ddot{\varphi} + \frac{3c}{m} \dot{\varphi} \sin^2 \varphi + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \cos \varphi - \frac{3F(t)}{ml} \cos \varphi = 0,$$

где φ — угол стержня с горизонтом.

2.11.

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{4}{3} M a^2 \ddot{\theta} - \frac{4}{3} M \omega^2 a^2 \sin \theta \cos \theta - M g a \sin \theta = 0, \\ & \frac{2}{3} M a^2 \dot{\theta}^2 - \frac{2}{3} M \omega^2 a^2 \sin^2 \theta + M g a \cos \theta = \text{const}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad R_A = & \frac{3}{4} M g \sin \theta (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0) + \\ & + M \omega^2 a \sin \theta (\cos 2\theta - \cos^2 \theta_0). \end{aligned}$$

2.12.

$$r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi} + g \sin \varphi = 0, \quad \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi + \frac{c}{m}(r - l) + g = 0,$$

где (φ, r) — полярные координаты с полюсом в точке подвеса; φ — угол нити с вертикалью.

2.13.

$$L_1 = \frac{m}{2} [(a^2 - z^2) \dot{\lambda}^2 + a^2 \dot{z}^2 (a^2 - z^2)^{-1}] + mgz,$$

$$R_1 = \frac{m}{2} a^2 (a^2 - z^2)^{-1} \dot{z}^2 - \frac{1}{2m} \beta^2 (a^2 - z^2)^{-1} + mgz,$$

$$m(a^2 - z^2) \dot{\lambda}^2 = \beta,$$

$$\frac{m}{2} a^2 (a^2 - z^2)^{-1} \dot{z}^2 + \frac{1}{2m} \beta^2 (a^2 - z^2)^{-1} - mgz = h;$$

$$L_2 = \frac{m}{2} a^2 (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi) + mga \cos \varphi,$$

$$R_2 = \frac{ma^2}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{\beta^2}{2ma^2 \sin^2 \varphi} + mga \cos \varphi,$$

$$ma^2 \dot{\theta} \sin^2 \varphi = \beta, \quad \frac{ma^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{\beta^2}{2ma^2 \sin^2 \varphi} - mga \cos \varphi = h,$$

где β и h — произвольные постоянные, z — вертикаль, направленная вниз, φ — угол радиус-вектора с вертикалью z .

2.14.

$$\ddot{\varphi} + \dot{\theta}^2 \cos \varphi \sin \varphi + \frac{c}{m} \dot{\varphi} = 0,$$

$$\ddot{\theta} \cos^2 \varphi + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{c}{m} \dot{\theta} \cos^2 \varphi = 0.$$

Точка движется по большому кругу, скорость её асимптотически стремится к нулю, длина пройденного пути всегда конечна.

2.15.

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + 2cx = 0,$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0.$$

2.16.

$$(M + m)\ddot{x} - Ml(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) + cx - (M + m)g = 0,$$

$$4l\ddot{\varphi} - 3\ddot{x} \sin \varphi + 3g\ddot{x} \sin \varphi = 0.$$

2.17.

$$(3M + 2m)\ddot{x} + 2ml\ddot{\varphi} \cos \varphi - 2ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + 2cx = 0,$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0.$$

2.18.

$$\begin{pmatrix} x \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \alpha) + B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \beta),$$

$$\omega_1^2 = 4\frac{c}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{8}{7}\frac{c}{m}.$$

2.19.

$$a = \frac{(m + M)g \sin 2\alpha}{3M + m(1 + 2 \sin^2 \alpha)}, \quad N = \frac{(m + M)(3M + m)g \cos \alpha}{3M + m(1 + 2 \sin^2 \alpha)}.$$

2.20.

$$(4M + 3m)R\ddot{\theta} + m(R - r)[2 \cos(\varphi - \theta) - 1]\ddot{\varphi} -$$

$$- 2m(R - r) \sin(\varphi - \theta)\dot{\varphi}^2 + 2(M + m)g \sin \theta = 0,$$

$$3(R - r)\ddot{\varphi} + R[2 \cos(\varphi - \theta) - 1]\ddot{\theta} + 2R\dot{\theta}^2 \sin(\varphi - \theta) +$$

$$+ 2g \sin \varphi = 0.$$

2.21.

$$a = \frac{6M + 6m + 2M_1}{6M + 9m + 2M_1} g \sin \alpha.$$

2.22.

$$\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi} - \frac{2}{3}\rho\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3}g \cos \varphi, \quad \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) - R\rho\dot{\varphi}^2 = -g\rho \sin \varphi,$$

$$\frac{3}{2}R^2\left(\frac{\dot{\rho}}{R} - \dot{\varphi}\right)^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 - g(\rho \cos \varphi - R \sin \varphi) = \text{const}.$$

2.23.

$$a_1 = \frac{(3M_1 + 2M_2) \sin \alpha - M_2 \sin \beta}{3(M_1 + M_2)} g,$$

$$a_2 = \frac{M_1 \sin \alpha - (2M_1 + 3M_2) \sin \beta}{3(M_1 + M_2)} g,$$

$$S = \frac{M_1 M_2 (\sin \alpha + \sin \beta)}{3(M_1 + M_2)} g.$$

2.24.

$$1) L = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}(R-r)^2(\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 + \frac{m}{4}(r\dot{\theta} - (R-r)\dot{\psi})^2 +$$

$$+ mg(R-r) \cos(\theta + \psi),$$

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}(R-r)^2(\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 + \frac{m}{4}(r\dot{\theta} - (R-r)\dot{\psi})^2 -$$

$$- mg(R-r) \cos(\theta + \psi) = h;$$

$$2) L = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{4}(R\dot{\theta} - (R-r)\dot{\varphi})^2 +$$

$$+ mg(R-r) \cos \varphi,$$

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{4}(R\dot{\theta} - (R-r)\dot{\varphi})^2 -$$

$$- mg(R-r) \cos \varphi = h,$$

$$MR^2\dot{\theta} + \frac{m}{2}R(R\dot{\theta} - (R-r)\dot{\varphi}) = \beta;$$

$$3) \ddot{\varphi} = -\frac{2M+m}{3M+m} \frac{g}{R-r} \sin \varphi, \quad \dot{\theta} = \frac{2\beta + mR(R-r)\dot{\varphi}}{(2M+m)R^2}.$$

2.25.

$$\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2 \varphi\right) \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

2.26.

$$\left(1 - \frac{2m}{3M + 2m} \cos^2 \varphi\right) \ddot{\varphi} + \frac{m}{3M + 2m} \sin 2\varphi \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0,$$

$$\dot{x} = \frac{2(\beta - ml\dot{\varphi} \cos \varphi)}{3M + 2m}.$$

2.27.

$$L = \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(j^2 + l^2\dot{\varphi}^2) + m\dot{x}(l \sin \varphi + l\dot{\varphi} \cos \varphi) + mgl \cos \varphi - \frac{c(l-l_0)^2}{2},$$

$$(M+m)\dot{x} + m(l \sin \varphi + l\dot{\varphi} \cos \varphi) = \beta,$$

$$\frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(j^2 + l^2\dot{\varphi}^2) + m\dot{x}(l \sin \varphi + l\dot{\varphi} \cos \varphi) - mgl \cos \varphi + \frac{c(l-l_0)^2}{2} = h,$$

$$R = \frac{m}{2}(j^2 + l^2\dot{\varphi}^2) - \frac{(\beta - m(l \sin \varphi + l\dot{\varphi} \cos \varphi))^2}{2(M+m)} + mgl \cos \varphi - \frac{c(l-l_0)^2}{2},$$

где β, h — произвольные постоянные.

2.28.

$$x_1 = \frac{u_0}{m_1 + m_2} \left(m_1 t + \frac{m_2}{k} \sin kt \right),$$

$$x_2 = l + \frac{u_0 m_1}{m_1 + m_2} \left(t - \frac{1}{k} \sin kt \right),$$

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad \eta = x_2 - x_1;$$

$$\xi = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 u_0 t + m_2 l), \quad \eta = l - \frac{u}{k} \sin kt,$$

$$k = \sqrt{c \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}.$$

2.29.

$$1) m_1 \dot{\varphi}_1 + m_2 \dot{\varphi}_2 = \beta,$$

$$\frac{r^2}{2} (m_1 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 \dot{\varphi}_2^2) + \frac{c}{2} \left(2r \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} - l \right)^2 = h,$$

$$2) \theta_1 = \varphi_2 - \varphi_1, \quad \theta_2 = \frac{m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2}{m_1 + m_2},$$

$$\frac{m_1 m_2 r}{m_1 + m_2} \ddot{\theta}_1 + cr \left(2r \sin \frac{\theta_1}{2} - l \right) \cos \frac{\theta_1}{2} = 0,$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\beta}{(m_1 + m_2)r^2},$$

где β, h — произвольные постоянные.

2.30.

$$\varphi = -\frac{mM}{2(m+M)} \frac{R\alpha}{J + \frac{mM}{m+M}R^2} t^2 = \frac{\beta}{2R} t^2,$$

$$\xi = -\frac{mR}{m+M} \cos \frac{\alpha + \beta}{2R} t^2, \quad \eta = -\frac{mR}{m+M} \sin \frac{\alpha + \beta}{2R} t^2,$$

где φ — угол поворота диска, а ξ и η — координаты центра масс диска в неподвижной декартовой системе, имеющей начало в центре инерции системы.

2.31.

$$L = \frac{2}{3} ml^2 (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi) - mgl \cos \varphi,$$

$$\frac{4}{3} ml^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi = \beta, \quad \frac{2}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{3}{8} \frac{\beta^2}{ml^2 \sin^2 \varphi} + mgl \cos \varphi = h,$$

$$\frac{4}{3} ml^2 \ddot{\varphi} - \frac{3}{4} \frac{\beta^2 \cos \varphi}{ml^2 \sin^3 \varphi} - mgl \sin \varphi = 0, \quad \dot{\theta} = \frac{3}{4} \frac{\beta}{ml^2 \sin^2 \varphi},$$

где β, h — произвольные постоянные.

2.32.

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 \cos(\dot{\theta}_0 \cos \varphi_0 t), \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\cos \varphi_0} \operatorname{tg}(\dot{\theta}_0 \cos \varphi_0 t),$$

$$z = z_0 + \frac{gt^2}{2}.$$

2.33.

$$1) \frac{d}{dt} [(b^2 + a^2 \sin^2 \theta) \dot{\psi}] = 0, \quad \ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0.$$

$$2) M_\psi = \frac{2ma^2}{3} \Omega \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta.$$

$$3) \frac{ma^2}{3} (\ddot{\theta} - \Omega^2 \sin \theta \cos \theta) = -c\dot{\theta}.$$

$$4) \psi = c \int (b^2 + a^2 \sin^2 \omega t)^{-1} dt, \quad c = \text{const}.$$

2.34. а) $Q_\theta = 0, Q_\psi = M, Q_\varphi = M \cos \theta$; б) $Q_\theta = 0, Q_\psi = M \cos \theta, Q_\varphi = M$; в) $Q_\theta = -c\dot{\theta}, Q_\psi = -c(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta), Q_\varphi = -c(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)$.

2.35.

$$R = \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2A \sin^2 \theta} (c_\psi - c_\varphi \cos \theta)^2 - \frac{c_\varphi^2}{2C} - mgl \cos \theta,$$

где c_φ, c_ψ — произвольные постоянные.

2.36.

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + x^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta)) + \\ + \frac{mR^2}{4} \left(\frac{1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 \right) - \\ - mgx \cos \theta - \frac{c}{2} (x - l)^2,$$

$$R = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{mR^2}{8} \dot{\theta}^2 - \frac{(c_\psi - c_\varphi \cos \theta)^2}{2m \sin^2 \theta (x^2 + \frac{R^2}{4})} - \frac{c_\varphi^2}{mR^2} - \\ - mgx \cos \theta - \frac{c}{2} (x - l)^2.$$

где x — расстояние центра диска от точки O , φ, ψ, θ — углы Эйлера.

3.1.

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2ca^2}{m^2} + \frac{g}{l}}}.$$

3.2.

$$a^2 > \frac{mgl}{2c}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2ca^2}{m^2} - \frac{g}{l}}}.$$

3.3.

$$T = \frac{\pi\sqrt{3}}{1 + 2\frac{a}{d}} \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

3.4.

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{Mga}{M(R-a)^2 + J}}.$$

3.5.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M(k^2 + a^2) + mr^2}{g\sqrt{M^2 a^2 - m^2 r^2}}}; \quad \frac{a}{r} > \frac{m}{M}.$$

3.6.

$$T = \frac{\pi}{2g} \sqrt{2g(9\pi - 16)R}.$$

3.8.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g(2\mu - 1) \sin \alpha_0}},$$

где $\mu = \frac{m_1}{m_2}$ и α_0 – угол нити с вертикалью при равновесии системы.

3.9.

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{17}} \sqrt{\frac{l}{g}} \approx 7,53 \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

3.10.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{3bg}} \sqrt[4]{l^2 - (b - a)^2}.$$

3.11.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}.$$

3.12.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M a^2 + J_0}{M g(R - a) + 2cl^2}}.$$

3.13.

$$T = 2\pi \frac{s + a}{\sqrt{g(s - a)}}.$$

3.14.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2ml}{3(mg - cl)}} \quad \text{при } mg > cl,$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2ml(2cl - mg)}{3(3cl - mg)(cl - mg)}} \quad \text{при } mg < cl.$$

3.16.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{c} \frac{(a^2 + 4l^2)}{16cl^3 + Mga^2}}.$$

$$3.17. \quad \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

3.18.

$$k_{1,2}^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2 \mp \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4n_1^2 n_2^2 \gamma_{12}^2}}{2(1 - \gamma_{12}^2)},$$

где $n_1^2 = \frac{g}{a}$, $n_2^2 = \frac{g}{b}$, $\gamma_{12}^2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}$.

3.19.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left(A_1 \cos \sqrt{\frac{2c}{3m}}t + B_1 \sin \sqrt{\frac{2c}{3m}}t \right) + \\ + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(A_2 \cos \sqrt{\frac{2c}{m}}t + B_2 \sin \sqrt{\frac{2c}{m}}t \right).$$

3.20.

$$\frac{c}{m} > (2 + \sqrt{2})\frac{g}{l},$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{c}{m} - (2 + \sqrt{2})\frac{g}{l}}t + \alpha_1 \right) + \\ + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{c}{m} - (2 - \sqrt{2})\frac{g}{l}}t + \alpha_2 \right).$$

3.21.

$$\varphi_1 = \alpha \cos \frac{k_1 + k_2}{2}t \cos \frac{k_2 - k_1}{2}t,$$

$$\varphi_2 = \alpha \sin \frac{k_1 + k_2}{2}t \sin \frac{k_2 - k_1}{2}t,$$

где φ_1 и φ_2 — углы отклонения маятников от вертикали и

$$k_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ch^2}{ml^2}}.$$

3.22.

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{3r}}t + \alpha_1 \right) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{r}}t + \alpha_2 \right).$$

3.23.

$$\varphi = A_1 \sin \left(\sqrt{\frac{4c}{3m}}t + \alpha_1 \right), \quad \psi = A_2 \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha_2 \right).$$

3.24.

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{2g}{15r}}t + \alpha_1 \right) + \\ + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{4r}}t + \alpha_2 \right).$$

3.25.

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \frac{\theta_0}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{g}{3l}} t - \frac{\theta_0}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \cos \sqrt{\frac{3g}{2l}} t, \quad l = \frac{R-r}{2}.$$

3.26.

$$x = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t, \quad y = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t, \\ \omega^2 = \frac{2c}{m}.$$

3.27.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ l\varphi_1 \\ x_2 \\ l\varphi_2 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{2l}} t + \alpha_1 \right) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{2g}{l}} t + \alpha_2 \right) + \\ + A_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{17} + 1 \\ -2 \\ -\sqrt{17} - 1 \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{7 - \sqrt{17}}{4}} \frac{g}{l} t + \alpha_3 \right) + \\ + A_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{17} + 1 \\ -2 \\ \sqrt{17} - 1 \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{7 + \sqrt{17}}{4}} \frac{g}{l} t + \alpha_4 \right).$$

3.28.

$$\varphi = \varphi_0 \cos \sqrt{\frac{3}{4} \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + 3m_2} \frac{g}{a}} t; \quad \psi = \omega_0 t,$$

где ψ — угол, образуемый стержнем AB с вертикальным направлением.

3.29.

$$\begin{pmatrix} x \\ l\varphi \end{pmatrix} = (v_0 t + c) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ 1 \end{pmatrix} \sin \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}} \frac{g}{l} t; \\ \begin{pmatrix} x \\ l\varphi \end{pmatrix} = (v_0 t + c) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} -\frac{2m}{3M + 2m} \\ 1 \end{pmatrix} \sin \sqrt{\frac{3M + 2m}{3M}} \frac{g}{l} t.$$

3.30.

$$\varphi_1 = \frac{v_0}{2r} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right), \quad \varphi_2 = 2\alpha + \frac{v_0}{2r} \left(t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right).$$

3.31.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(3M + m)(R - r)}{(2M + m)g}}.$$

3.32.

$$\begin{pmatrix} x \\ l\varphi_1 \\ l\varphi_2 \end{pmatrix} = (v_0 t + \alpha_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha_2\right) + \\ + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \sin\left(2\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha_3\right).$$

3.33.

$$\begin{pmatrix} x \\ l_1\varphi \\ l \end{pmatrix} = (v_0 t + \alpha_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ + A_2 \begin{pmatrix} -\frac{m}{M+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{M+m}{M}} \frac{g}{l_1} t + \alpha_2\right) + \\ + A_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}} t + \alpha_3\right),$$

 где $l_1 = l_0 + \frac{mg}{c}$.

3.34.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J + mr_0^2}{J(k^2 - \omega_0^2) + mr_0^2(k^2 + 3\omega_0^2)}},$$

 где $k^2 = \frac{c}{m}$ и $r_0 = OM_0$ при условии $k > \omega_0$.

3.35.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sin \alpha_0} \sqrt{\frac{J + ma^2 \sin^2 \alpha_0}{J + ma^2(1 + 3 \cos^2 \alpha_0)}}.$$

4.1.

$$1) x = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}, \quad p = m\omega(c_1 e^{\omega t} - c_2 e^{-\omega t}).$$

$$2) W = -ht + \int \sqrt{2mh + m^2\omega^2 x^2} dx,$$

 где h — произвольная постоянная.

4.2.

$$1) r = \frac{1}{2} \left(a - \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2} \right) \left(e^{0,5\omega t\sqrt{2}} + e^{-0,5\omega t\sqrt{2}} \right) + \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2},$$

$$p_r = \frac{\sqrt{2}}{4} m\omega \left(a - \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2} \right) \left(e^{0,5\omega t\sqrt{2}} - e^{-0,5\omega t\sqrt{2}} \right),$$

$$2) W = -ht + \sqrt{2m} \int \sqrt{h - \frac{mgr}{\sqrt{2}} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}} dr,$$

где h — произвольная постоянная.

4.3.

$$1) \varphi = \frac{v_0 t}{R - at}, \quad p_\varphi = mRv_0,$$

где φ — угол нити с её положением в начальный момент.

$$2) W = \alpha\varphi - \frac{\alpha^2}{2ma} \frac{1}{R - at}, \quad \varphi - \varphi_0 = \frac{\alpha}{ma} \frac{1}{R - at}, \quad p = \alpha,$$

где φ_0, α — произвольные постоянные.

4.4.

$$1) s = v_0 \sqrt{\frac{4r}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{4r}} t, \quad p = mv_0 \cos \sqrt{\frac{g}{4r}} t.$$

$$2) W = -ht + \int \sqrt{2mh - \frac{m^2 g}{4r} s^2} ds, \quad \frac{\partial W}{\partial h} = \beta,$$

$$s = \sqrt{\frac{8rh}{mg}} \sin \sqrt{\frac{g}{4r}} (t - \beta), \quad p = \sqrt{2mh} \cos \sqrt{\frac{g}{4r}} (t - \beta),$$

где β, h — произвольные постоянные.

4.5.

$$1) z = \frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha + z_0, \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{v_0}{r} t \cos \alpha,$$

$$p_z = m(gt + v_0 \sin \alpha), \quad p_\varphi = mrv_0 \cos \alpha,$$

где r, φ — цилиндрические координаты.

$$2) W = -ht + \alpha\varphi + \sqrt{2m} \int \sqrt{h - \frac{\alpha^2}{2mr^2} + mgz} dz,$$

$$z = \frac{g}{2} (t - t_0)^2 - \frac{1}{mg} \left(h - \frac{\alpha^2}{2mr^2} \right), \quad \varphi - \varphi_0 = \frac{\alpha}{mr^2} (t - t_0).$$

4.6.

$$W = -ht + \alpha_\varphi \varphi + \int \sqrt{4h + 4r^2 - \frac{2\alpha_\varphi^2}{r^2}} dr,$$

$$r^2 = e^{2t} + e^{-2t}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{2t},$$

где h, α_φ – произвольные постоянные.

4.7.

$$W = -ht + \int \sqrt{2mh - mcx^2} dx,$$

$$x = \sqrt{\frac{2h}{c}} \cos \sqrt{\frac{c}{m}}(t - \beta), \quad p_x = -\sqrt{2mh} \sin \sqrt{\frac{c}{m}}(t - \beta),$$

где β, h – произвольные постоянные.

4.8.

$$1) q = \operatorname{arsh}\left(\sqrt{-1 - \frac{1}{2h}} \sin(\sqrt{-2h}t + \alpha)\right),$$

$$p = \frac{\sqrt{2h+1} \cos(\sqrt{2h}t + \alpha)}{\sqrt{2h+1} \sin(\sqrt{2h}t + \alpha) - 2h},$$

$$-\frac{1}{2} \leq h < 0.$$

$$2) q = \ln(1 + \sqrt{1+h} \sin(\sqrt{-2h}t + \alpha)) - \ln(-h),$$

$$p = \frac{\sqrt{-2h}\sqrt{h+1} \cos(\sqrt{-2h}t + \alpha)}{1 + \sqrt{1+h} \sin(\sqrt{-2h}t + \alpha)},$$

где h, α – произвольные постоянные.

4.9.

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{ml^2}, \quad \dot{p} = ml^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - mgl \sin \varphi,$$

$$\frac{p^2}{2ml^2} - \frac{ml^2}{2} \omega \sin^2 \varphi - mgl \cos \varphi = \text{const}.$$

4.10.

$$W = -ht + \sqrt{2J} \int \sqrt{mgl \cos \varphi + h} d\varphi,$$

$$-t + \sqrt{\frac{J}{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{mgl \cos \varphi + h}} = -\beta,$$

$$\sqrt{2J} \sqrt{mgl \cos \varphi + h} = p_\varphi,$$

где β и h — произвольные постоянные.

4.11.

$$W = -ht + \alpha\theta + \int \sqrt{2mr^2h + 2m^2gR^3 \cos \varphi - \frac{\alpha^2}{\sin^2 \varphi}} d\varphi,$$

$$\theta - \int \frac{\alpha d\varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{2mr^2h - \frac{\alpha^2}{\sin^2 \varphi} - 2m^2gr^3 \cos \varphi}} = -\beta_1,$$

$$t + \frac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2mr^2h - \frac{\alpha^2}{\sin^2 \varphi} - 2m^2gr^3 \cos \varphi}} = -\beta_2,$$

$$p_1 = \alpha, \quad p_2 = \sqrt{2mr^2h - \frac{\alpha^2}{\sin^2 \varphi} - 2m^2gr^3 \cos \varphi},$$

где h, α — произвольные постоянные.

4.12.

$$1) \theta_1 = \varphi_2 - \varphi_1, \quad \theta_2 = \frac{m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2}{m_1 + m_2}.$$

$$2) S = -ht + \alpha_2\theta_2 + r\sqrt{2\mu} \int \sqrt{\alpha_1 - \frac{c}{2}(r\theta_1 - l)^2} d\theta_1,$$

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}, \quad h = \alpha_1 + \frac{\alpha_2^2}{2(m_1 + m_2)r^2},$$

$$\theta_1 = \frac{l}{r} + \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2\alpha_1}{c}} \sin \sqrt{\frac{c}{\mu}}(t - t_0), \quad \theta_2 = \frac{\alpha_2 t}{(m_1 + m_2)r^2} + \theta_2^0,$$

$$p_1 = r\alpha_1 \sqrt{2\mu} \cos \sqrt{\frac{c}{\mu}}(t - t_0), \quad p_2 = \alpha_2,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, t_0, \theta_2^0$ — произвольные постоянные.

4.13.

$$1) y_1 = \frac{x_2 - x_1}{2}, \quad y_2 = \frac{x_2 + x_1}{2}.$$

$$2) W = -(\alpha_1 + \alpha_2)t +$$

$$+ \sqrt{2m} \int \sqrt{m \left(\frac{m\omega^2}{2} y_1^2 - \frac{c}{2} (2y_1 - l)^2 + \alpha_1 \right)} dy_1 +$$

$$+ \sqrt{2m} \int \sqrt{\frac{m\omega^2}{2} y_2^2 + \alpha_2} dy_2.$$

$$3) \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = -\beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = -\beta_2,$$

$$y_1 = f(\alpha_1) (e^{k(t-\beta_1)} + e^{-k(t-\beta_1)}) - \frac{2cl}{mk^2} \quad \text{при } \omega^2 > \frac{4c}{m},$$

$$f(\alpha_1) = \frac{1}{2k^2} \sqrt{\frac{c}{m} \omega^2 l^2 - 2k^2 \alpha_1}, \quad k^2 = \omega^2 - \frac{4c}{m};$$

$$y_1 = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{c}{m} \frac{\omega^2}{\Omega^2} l^2 + 2\alpha_1} \sin \Omega(t - \beta_1) + \frac{2cl}{m\Omega^2} \quad \text{при } \omega^2 < \frac{4c}{m},$$

$$\Omega^2 = \frac{4c}{m} - \omega^2,$$

$$y_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{-\frac{\alpha_2}{2m}} (e^{\omega(t-\beta_2)} + e^{-\omega(t-\beta_2)}),$$

$$p_1 = \frac{\partial W}{\partial y_1} = \sqrt{2m \left(\frac{m\omega^2}{2} y_1^2(t) - \frac{c}{2} (2y_1(t) - l)^2 + \alpha_1 \right)},$$

$$p_2 = \frac{\partial W}{\partial y_2} = \sqrt{2m \left(\frac{m\omega^2}{2} y_2^2(t) + \alpha_2 \right)},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — произвольные постоянные.

4.14.

$$W = \alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z - ht, \quad \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z = h,$$

$$x = \frac{\alpha_x}{m} t + \beta_x, \quad y = \frac{\alpha_y}{m} t + \beta_y, \quad z = \frac{\alpha_z}{m} t + \beta_z,$$

$$p_x = \alpha_x, \quad p_y = \alpha_y, \quad p_z = \alpha_z,$$

где $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta_x, \beta_y, \beta_z$ — произвольные постоянные.

4.15.

$$W = -ht + \alpha x + \int \sqrt{2mh - \alpha^2 - 2m^2gy} dy,$$

$$x = x_0 + \frac{\alpha}{m}(t - \beta), \quad p_x = \alpha,$$

$$y = -\frac{g}{2}(t - \beta)^2 - \frac{\alpha}{2m^2g} + \frac{h}{mg}, \quad p_y = -mg(t - \beta),$$

где α , h , β и x_0 — произвольные постоянные.

4.16.

$$W = -ht + \alpha_x x + \alpha_y y + \int \sqrt{2mh - \alpha_x^2 - \alpha_y^2 - 2m^2gz} dz,$$

$$x = \frac{\alpha_x}{m}(t - \beta) + x_0, \quad p_x = \alpha_x,$$

$$y = \frac{\alpha_y}{m}(t - \beta) + y_0, \quad p_y = \alpha_y,$$

$$z = -\frac{g}{2}(t - \beta)^2 + \frac{1}{2m^2g}(2mh - \alpha_x^2 - \alpha_y^2), \quad p_z = -mg(t - \beta),$$

где α_x , α_y , h , β , x_0 , y_0 — произвольные постоянные.

4.17.

$$W = -(\alpha_x + \alpha_z)t + \int \sqrt{2m\alpha_x + m^2\omega^2x^2} dx + \int \sqrt{2m\alpha_z - 2m^2gz} dz,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_x} = -\beta_x,$$

$$x = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\alpha_x}{2m}} (e^{\omega(t+\beta_x)} - e^{-\omega(t+\beta_x)}),$$

$$p_x = \sqrt{\frac{\alpha_x}{2m}} (e^{\omega(t+\beta_x)} - e^{-\omega(t+\beta_x)}),$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_z} = -\beta_z,$$

$$z = -\frac{g}{2}(t - \beta_z)^2 + \frac{\alpha_z}{mg}, \quad p_z = -mg(t - \beta_z),$$

где α_x , α_z , β_x , β_z — произвольные постоянные.

4.18.

$$W = -ht + \alpha\varphi + \int \sqrt{2(m_1 + m_2)\left(h - \frac{\alpha^2}{2m_1r^2} - m_2gr\right)} dr,$$

$$-t + \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{h - \frac{\alpha^2}{2m_1r^2} - m_2gr}} = -\beta,$$

$$\varphi + \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2}} \frac{1}{r^2} \int \frac{dr}{\sqrt{h - m_2gr - \frac{\alpha^2}{2m_1r^2}}} = -\beta_\varphi,$$

$$p_\varphi = \alpha, \quad p_r = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2}} \int \frac{\frac{\alpha^2}{m_1r^3} - m_2g}{\sqrt{h - m_2gr - \frac{\alpha^2}{2m_1r^2}}} dr,$$

где r, φ — полярные координаты точки массы m ; $h, \alpha, \beta, \beta_\varphi$ — произвольные постоянные.

4.19.

1) $p_x = \alpha_x, \quad p_y = \alpha_y, \quad p_\varphi = \alpha_\varphi, \quad H = h.$

2) $W = -ht + \alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_\varphi \varphi +$

$$+ \int \sqrt{2\mu\alpha_r - c\mu(r-l)^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}} dr,$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad h = \frac{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}{2(m_1 + m_2)} + \alpha_r,$$

$$x = \frac{\alpha_x}{m_1 + m_2} t + \beta_x, \quad y = \frac{\alpha_y}{m_1 + m_2} t + \beta_y,$$

$$\varphi - \int \frac{\alpha_\varphi dr}{\sqrt{2\mu\alpha_r - c\mu(r-l)^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}} = -\beta_\varphi,$$

$$p_x = \alpha_x, \quad p_y = \alpha_y, \quad p_\varphi = \alpha_\varphi, \quad p_r^2 = 2\mu\alpha_r - c\mu(r-l)^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2},$$

где $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_r, \alpha_\varphi, \beta_x, \beta_y, \beta_r, \beta_\varphi$ — произвольные постоянные.

4.20.

$$\begin{aligned}
W &= -ht + \alpha_\theta \theta + \int \sqrt{\alpha_\varphi + \frac{\alpha_\theta^2}{\cos^2 \varphi}} d\varphi + \\
&\quad + \int \sqrt{2mh + \frac{2m^2\gamma}{r} - \frac{\alpha_\varphi}{r^2}} dr, \\
\theta - \alpha_\theta \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{\alpha_\varphi - \frac{\alpha_\theta^2}{\cos^2 \varphi}}} &= -\beta_\theta, \\
\frac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_\varphi - \frac{\alpha_\theta^2}{\cos^2 \varphi}}} - \frac{1}{2} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2mh + \frac{2m^2\gamma}{r} - \frac{\alpha_\varphi}{r^2}}} &= -\beta_\varphi, \\
-t + \int \frac{m dr}{\sqrt{2mh + \frac{2m^2\gamma}{r} - \frac{\alpha_\varphi}{r^2}}} &= -\beta, \\
p_\theta = \alpha_\theta, \quad p_\varphi^2 = \alpha_\varphi - \frac{\alpha_\theta^2}{\cos^2 \varphi}, \quad p_r^2 = 2m \left(h + \frac{\gamma m}{r} \right) - \frac{\alpha_\varphi}{r^2},
\end{aligned}$$

где $\alpha_\theta, \alpha_\varphi, h, \beta_\theta, \beta_\varphi, \beta$ — произвольные постоянные, γ — гравитационная постоянная.

4.21.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\alpha_x}{m_1 + m_2} t + \beta_x, \quad y = \frac{\alpha_y}{m_1 + m_2} t + \beta_y, \quad z = \frac{\alpha_z}{m_1 + m_2} t + \beta_z, \\
\theta + \int \frac{\alpha_\theta d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{\alpha_\varphi - \frac{\alpha_\theta^2}{\cos^2 \varphi}}} &= -\beta_\theta, \\
\frac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_\varphi - \frac{\alpha_\theta^2}{\cos^2 \varphi}}} - \frac{1}{2} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu\alpha_r + \frac{2\gamma\mu m_1 m_2}{r} - \frac{\alpha_\varphi}{r^2}}} &= -\beta_\varphi, \\
-t + \int \frac{\mu dr}{\sqrt{2\mu\alpha_r + \frac{2\gamma\mu m_1 m_2}{r} - \frac{\alpha_\varphi}{r^2}}} &= -\beta_r, \\
p_x = \alpha_x, \quad p_y = \alpha_y, \quad p_z = \alpha_z, \quad p_\theta = \alpha_\theta,
\end{aligned}$$

$$p_\varphi^2 = \alpha_\varphi - \frac{\alpha_\theta^2}{\cos^2 \varphi}, \quad p_r^2 = 2\mu\alpha_r + \frac{2\gamma\mu m_1 m_2}{r} - \frac{\alpha_\varphi}{r^2},$$

где $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \alpha_\theta, \alpha_\varphi, \beta_x, \beta_y, \beta_z, \beta_\theta, \beta_\varphi$ — произвольные постоянные.

4.22.

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_\xi} = -\beta_\xi, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_\eta} = -\beta_\eta, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_\varphi} = -\beta_\varphi,$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\alpha_\xi}{2m}} \frac{1}{\omega} (e^{\omega(t-\beta_\xi)} - e^{-\omega(t-\beta_\xi)}),$$

$$\eta = -\frac{gt^2}{2} + g\beta_\eta t - \frac{g\beta_\eta^2}{2} + \frac{\alpha_\eta}{mg},$$

$$t - \beta_\varphi = \sqrt{\frac{ml^2}{6}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_\varphi + \frac{ml^2\omega^2}{6} \sin^2 \varphi}},$$

$$p_\xi = 2m\alpha_\xi + (m\omega\xi)^2 = \sqrt{\frac{\alpha}{2m}} (e^{\omega(t-\beta_\xi)} - e^{-\omega(t-\beta_\xi)}),$$

$$p_\eta = 2m\alpha_\xi - 2m^2\eta g = -gt + g\beta_z,$$

$$p_\varphi = \sqrt{\frac{2ml^2}{3}} \sqrt{\alpha_\varphi + \frac{ml^2}{6} \sin^2 \varphi},$$

где $\alpha_\xi, \alpha_\eta, \alpha_\varphi, \beta_\xi, \beta_\eta, \beta_\varphi$ — произвольные постоянные, W — полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби.

4.23.

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi - p_\varphi \cos \theta}{A \sin^2 \theta}, \quad \dot{p}_\psi = 0,$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{A}, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{(p_\varphi \cos \theta - p_\psi)(p_\psi \cos \theta - p_\varphi)}{A \sin^3 \theta} + mgl \sin \theta,$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{p_\psi - p_\varphi \cos \theta}{A \operatorname{tg} \theta \sin \theta} + \frac{p_\varphi}{C}, \quad \dot{p}_\varphi = 0,$$

$$W = -ht + \alpha_\psi \psi + \alpha_\varphi \varphi +$$

$$+ \int \sqrt{2A \left(h - \frac{\alpha_\varphi^2}{2C} - mgl \cos \theta \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} (\alpha_\psi - \alpha_\varphi \cos \theta)^2} d\theta,$$

где $h, \alpha_\psi, \alpha_\varphi$ — произвольные постоянные.

4.24.

$$1) \quad x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t,$$

$$p = \omega(C_1 e^{\omega t} - C_2 e^{-\omega t}) + \frac{g}{2\omega} \cos \omega t;$$

$$2) \quad x = \beta e^{\omega t} - \frac{\alpha}{2m\omega} e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t,$$

$$p = \omega(\beta e^{\omega t} + \frac{\alpha}{2m} e^{-\omega t}) + \frac{g}{2\omega} \cos \omega t;$$

$$3) \quad W = \frac{m\omega x^2}{2} + x \left(\alpha e^{-\omega t} + \frac{mg}{2\omega} (\cos \omega t - \sin \omega t) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2}{4m\omega} e^{-2\omega t} - \frac{\alpha}{2\omega^2} e^{-\omega t} \sin \omega t \right),$$

где α, β – произвольные постоянные.

4.25.

$$W = \alpha_1 \xi + \frac{1}{12} ml^2 \omega \int \sqrt{\alpha_2 + \sin^2 \varphi} d\varphi + \frac{1}{2} m\omega \eta^2 + \\ + \left(\alpha_3 e^{-\omega t} - \frac{\sqrt{2}mg}{2\omega} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \omega t\right) \right) \eta - \\ - \left(\frac{\alpha_1^2}{2m} + \frac{\alpha_2^2 ml^2 \omega^2}{24} \right) t + \\ + \frac{1}{2m} \int \left(\alpha_3 e^{-\omega t} - \frac{\sqrt{2}mg}{2\omega} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \omega t\right) \right)^2 dt,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – произвольные постоянные.

4.26.

$$W = -ht + \alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_\theta \theta + \\ + \int \sqrt{2m(\alpha_z - mgz)} dz + \int \sqrt{\frac{2}{3} ml^2 \alpha_\varphi^2 - \frac{\alpha_\theta^2}{\sin^2 \varphi}} d\varphi, \\ h = \frac{1}{2m} (\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 + \alpha_\varphi^2), \quad x = \frac{\alpha_x}{m} t - \beta_x, \quad y = \frac{\alpha_y}{m} t - \beta_y, \\ z = -\frac{gt^2}{2} + mg \frac{\beta_z}{\alpha_z} t + \frac{\alpha_z^2}{2m^2 g} - \frac{m^2 g}{2} \left(\frac{\beta_z}{\alpha_z} \right)^2,$$

$$\theta = \beta_\theta + \alpha_\theta \int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{\frac{2}{3} l^2 \alpha_\varphi^2 - \frac{\alpha_\theta^2}{\sin^2 \varphi}}},$$

$$-t + \frac{2}{3} m l^2 \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{3} l^2 \alpha_\varphi^2 - \frac{\alpha_\theta^2}{\sin^2 \varphi}}} = -\beta_\varphi,$$

$$p_x = \alpha_x, \quad p_y = \alpha_y, \quad p_z = \sqrt{2m(\alpha_z - mgz)},$$

$$p_\theta = \alpha_\theta, \quad p_\varphi = -\frac{\alpha_\varphi}{m} t - \alpha_\theta^2 \int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{\frac{2}{3} l^2 \alpha_\varphi^2 - \frac{\alpha_\theta^2}{\sin^2 \varphi}}},$$

где $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \alpha_\varphi, \alpha_\theta, \beta_x, \beta_y, \beta_z, \beta_\varphi, \beta_\theta$ — произвольные постоянные.

4.27.

$$\varphi - \alpha_\varphi \int \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - 1)\sqrt{F_1(\lambda)}} - \alpha_\varphi \int \frac{d\mu}{(1 - \mu^2)\sqrt{F_2(\mu)}} = \beta_\varphi,$$

$$- \int \frac{d\lambda}{\sqrt{F_1(\lambda)}} + \int \frac{d\mu}{\sqrt{F_2(\mu)}} = 2\beta,$$

$$c^2 \int \frac{d\lambda}{\sqrt{F_1(\lambda)}} - c^2 \int \frac{d\mu}{\sqrt{F_2(\mu)}} = t - t_0,$$

$$p_\varphi = \alpha_\varphi, \quad p_\lambda = \frac{\sqrt{F_1(\lambda)}}{\lambda^2 - 1}, \quad p_\mu = \frac{\sqrt{F_2(\mu)}}{\mu^2 - 1},$$

где

$$F_1(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(2hc^2\lambda^2 + 2c(k_1 + k_2)\lambda - \alpha) - \alpha_\varphi^2,$$

$$F_2(\mu) = (1 - \mu^2)(-2hc^2\mu^2 + 2c(k_2 - k_1)\mu + \alpha) - \alpha_\varphi^2$$

(силы притяжения $p_1 = -\frac{k_1}{r_1^2}, p_2 = -\frac{k_2}{r_2^2}, k_1$ и k_2 — const).

4.28.

$$\begin{aligned}
 W = & -ht + \int \sqrt{2m(\alpha_\varphi - \Phi(\varphi))} d\varphi + \\
 & + \int \sqrt{2m\left(\alpha_\theta - \Theta(\theta) - \frac{\alpha_\varphi}{\sin^2 \theta}\right)} d\theta + \\
 & + \int \sqrt{2m\left(h - R(r) - \frac{\alpha_\theta}{r^2}\right)} dr.
 \end{aligned}$$

4.29.

$$\begin{aligned}
 W = & -ht + \alpha_\varphi \varphi + \int \sqrt{\frac{mh}{2} - \frac{mk - \beta}{2\xi} - \frac{\alpha_\varphi^2}{4\xi^2} + \frac{mk'\xi}{4}} d\xi + \\
 & + \int \sqrt{\frac{mh}{2} - \frac{mk + \beta}{2\eta} - \frac{\alpha_\varphi^2}{4\eta^2} + \frac{mk'\eta}{4}} d\eta,
 \end{aligned}$$

где h, α_φ, β — произвольные постоянные.

4.30.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2A \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \psi} - \frac{\partial W}{\partial \varphi} \cos \theta \right)^2 + \\
 + \frac{1}{2A} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2C} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + mgl \cos \theta = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W = & -ht + b_\varphi \psi + b_\psi \varphi + \\
 & + \int \sqrt{2Ah - \frac{Ab_\psi^2}{C} - \frac{(b_\varphi - b_\psi \cos \theta)^2}{\sin^3 \theta} - 2Agl \cos \theta} d\theta.
 \end{aligned}$$

5.2.

$$\begin{aligned}
 \{K_j, p_j\} = \{K_j, K_j\} = \{x_j, K_j\} = 0, \\
 \{K_1, p_2\} = -\{K_2, p_1\} = p_3, \quad \{K_3, p_1\} = -\{K_1, p_3\} = p_2, \\
 \{K_2, p_3\} = -\{K_3, p_2\} = p_1, \quad \{x_1, K_2\} = -\{x_2, K_1\} = x_3, \\
 \{x_3, K_1\} = -\{x_1, K_3\} = x_2, \quad \{x_2, K_3\} = -\{x_3, K_2\} = x_1, \\
 \{K_1, K_2\} = K_3, \quad \{K_2, K_3\} = K_1, \quad \{K_3, K_1\} = K_2, \\
 \{K^2, K_j\} = 0.
 \end{aligned}$$

5.3. $\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \dot{p}_i = \{p_i, H\}, i = 1, \dots, n.$ 5.9. $W(q_i, p_i, t) - \varphi(q_i, p_i, t).$ 5.10. $W(q_i, p_i, t) - \int f(t) dt.$

5.12.

$$1) c = \alpha\beta, \quad S_1 = \alpha \sum_{i=1}^n q_i P_i, \quad \tilde{H} = \alpha\beta H,$$

преобразование не является свободным;

$$2) c = -\alpha\beta, \quad S = -\beta \sum_{i=1}^n q_i Q_i, \quad \tilde{H} = -\alpha\beta H,$$

преобразование свободное;

$$3) c = -1, \quad S = -\operatorname{ctg} t \sum_{i=1}^n q_i Q_i,$$

$$\tilde{H} = -H + \frac{1}{\sin t \cos t} \sum_{i=1}^n Q_i P_i,$$

преобразование свободное;

$$4) c = \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta,$$

$$S = \frac{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}{2} q Q - \frac{1}{2\beta} (\alpha(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)q^2 + \beta_1 Q^2),$$

 преобразование будет свободным, если $\beta \neq 0$;

$$5) c = 1, \quad S = \frac{1}{2} q \arccos \frac{Q}{\sqrt{q}} - \frac{1}{2} Q \sqrt{q - Q^2},$$

преобразование свободное унивалентное.

5.13.

$$S = \frac{1}{2} Q (2qk - k^2 Q^2)^{1/2} - q \arccos \left(\frac{k^{1/2} Q}{(2q)^{1/2}} \right).$$

5.14.

$$1) p_x = p_\rho \cos \varphi - \frac{p_\varphi}{\rho} \sin \varphi, \quad p_y = p_\rho \sin \varphi + \frac{p_\varphi}{\rho} \cos \varphi, \quad p_z = p_z,$$

$$S_1 = p_x \rho \cos \varphi + p_y \rho \sin \varphi + p_z z;$$

$$2) p_x = p_r \cos \varphi \cos \theta - \frac{1}{r} p_\varphi \sin \varphi \cos \theta - \frac{1}{r \cos \varphi} p_\theta \sin \theta,$$

$$p_y = p_r \cos \varphi \sin \theta - \frac{1}{r} p_\varphi \sin \varphi \sin \theta + \frac{1}{r \cos \varphi} p_\theta \cos \theta,$$

$$p_z = p_r \sin \varphi + \frac{1}{r} p_\varphi \cos \varphi,$$

$$S_1 = p_x r \sin \theta \cos \varphi + p_y r \cos \theta \sin \varphi + p_z r \cos \theta;$$

$$3) \quad p_x = p_{q_1}, \quad p_y = p_{q_2}, \quad p_z = p_{q_3},$$

$$c = 1, \quad S_1 = p_x(q_1 - v_1 t) + p_y(q_2 - v_2 t) + p_z(q_3 - v_3 t);$$

$$4) \quad p_x = 2(p_\xi + p_\eta) \frac{\sqrt{\xi\eta}}{\xi + \eta} \cos \varphi - p_\varphi \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\xi\eta}},$$

$$p_y = 2(p_\xi + p_\eta) \frac{\sqrt{\xi\eta}}{\xi + \eta} \sin \varphi + p_\varphi \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\xi\eta}},$$

$$p_z = 2p_\xi \frac{\xi}{\xi + \eta} - 2p_\eta \frac{\eta}{\xi + \eta},$$

$$c = 1, \quad S_1 = p_x \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi + p_y \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi + \frac{1}{2} p_z (\xi - \eta).$$

5.16.

$$\varphi_i(p_j, t) = c p_i, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \psi_k}{\partial q_i}, \quad i, k = 1, \dots, n.$$

5.17. $Q = \omega q$, $P = p$, $c = \omega$, $S = S(t)$.

5.19.

$$x = \sqrt{\frac{2P}{\sqrt{mc}}} \sin X, \quad p = \sqrt{2\sqrt{mc}} \cos X.$$

5.20.

$$1) \quad S(t, q_0, q) = \frac{\omega}{2 \sin \omega t} ((q^2 + q_0^2) \cos \omega t - 2q_0 q);$$

$$2) \quad S(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \frac{m}{2t} ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2);$$

$$3) \quad S(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \frac{m}{2t} ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2) - \\ - \frac{mg}{2} (z + z_0)t - \frac{mg^2}{24} t^3.$$

5.21. $\tilde{H} = P^2 + 4Q^2$.5.22. $\tilde{H} = \sum_{i=1}^n (P_i^2 + a^2 Q_i^2)$.5.23. $\tilde{H} = 0$.5.24. $\tilde{H} = 0$.

Рекомендуемая литература

- [1] Антонов И. Л. «Избранные задачи теоретической механики». Изд-во Московского Университета, 1986.
- [2] Антонов И. Л. и др. «Задачи по аналитической механике». Изд-во механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, 2002.
- [3] Аппель П. «Теоретическая механика», тт. I, II. М: Физматгиз, 1960.
- [4] Арнольд В. И. «Математические методы классической механики». М: «Наука», 1979.
- [5] Балк М. Б., Дёмин В. Г., Куницын Л. Л. «Сборник задач по небесной механике и космодинамике», тт. I, II. М: «Наука», 1972.
- [6] Берёзкин Е. Н. «Курс теоретической механики». Изд-во МГУ, 1974.
- [7] Берёзкин Е. Н. «Решение задач по теоретической механике», ч. I, II, III. М: изд-во МГУ, 1973, 1974, 1977.
- [8] Бухгольц Н. Н. «Основной курс теоретической механики», ч. I, II. М: «Наука», 1969.
- [9] Бухгольц Н. Н., Воронков И. М., Минаков А. П. «Курс теоретической механики», тт. I, II. М: «Наука», 1970.
- [10] Вильке В. Г. «Теоретическая механика». Изд-во МГУ, 1991.
- [11] Гантмахер Ф. Р. «Лекции по аналитической механике». М: «Наука», 1966.
- [12] Голубев Ю. Ф. «Основы теоретической механики». Изд-во МГУ, 1992.
- [13] Колесников Н. Н., Сальникова Т. В., Якимова К. Е. «Классическая и аналитическая механика. Задачник». М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 1998.
- [14] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. «Механика», т. I. М: «Наука», 1965.
- [15] Лурье А. И. «Аналитическая механика». М: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1961.

- [16] *Маркеев А. П.* «Теоретическая механика». М: «Наука», 1990.
- [17] *Мещерский И. В.* «Сборник задач по теоретической механике». М: «Наука», 1981.
- [18] *Поляхова Е. Н.* «Сборник задач по аналитической механике». Изд-во Ленинградского Университета, 1982.
- [19] *Пятницкий Е. С., Трухан Н. М., Хамураев Ю. И., Яковенко Г. Н.* «Сборник задач по аналитической механике». М: «Наука», 1981.
- [20] *Суслов Г. К.* «Теоретическая механика». М. — Л.: ОГИЗ, 1946.
- [21] *Татаринов Я. В.* «Лекции по классической механике». Изд-во Московского Университета, 1984.
- [22] *Уиттекер Э. Т.* «Аналитическая динамика». М-Л: ОНТИ, 1937.
- [23] *Четаев Н. Г.* «Теоретическая механика». М: «Наука», 1987.

ЗАДАЧНИК ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.

Составители Т. В. Сальникова, К. Е. Якимова.

Под ред. К. Е. Якимовой.

Оригинал-макет: А. Н. Швец

Издано 07.11.2017.

Формат $60 \times 90 \frac{1}{16}$.

Гарнитура PT Serif.

Электронное издание.

Git hash: d30a7ce0fa2cf6ec35bc32c5540fb28ea7ff8c12

МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет,
кафедра теоретической механики и мехатроники.

119234, г. Москва, ГСП-1, ул. Ленинские горы, д. 1,

МГУ имени М. В. Ломоносова, к. 1617.